Eléments de correction de quelques exercices du TD n°1

Exercice 6

Soient les polynômes $P(x) = 6x^5 - 14x^4 + 11x^3 - 17x^2 + a\,x + b$ et $Q(x) = 2x^2 + 1$, où a et b sont des nombres réels.
Déterminer les valeurs de a et b de sorte que $Q(x)$ divise $P(x)$.
On obtient $Q(x) = 3x^3 - 7x^2 + 4x - 5$ et $R(x) = (a-4)x + b + 5$.
D'où : $a = 4$ et $b = -5$.

Exercice 7

1. Montrer que le polynôme $D(x) = x + 1$ divise le polynôme $P(x) = x^5 + 1$, et déterminer le quotient de $P(x)$ par $D(x)$.
   $D(-1) = 0 = P(-1)$ et $Q(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ (on peut utiliser l'algorithmr d'Horner ici).
2. Même question avec $D(x) = x^2 - 1$ et $P(x) = x^8 - 1$. Quelles sont les racines de $P(x)$?
   $P(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$ et $P(x) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 1$.

Exercice 8

Calculer le reste de la division euclidienne de $P(x) = x^n + x + 1$ par $(x-1)^2$ (où n est un entier supérieur ou égal à 2).
$deg(R(x)) < 2$ donc $R(x) = ax + b$, $P(x) = (x-1)^2 Q(x) + R(x)$.
$P(1) = 3 \iff r(1) = a + b = 3$ et $P'(x) = nx^{n-1} + 1 = 2(x-1)Q(x) + (x-1)^2 Q'(x) + R'(x)$
d'où $P'(1) = R'(1) = a = n + 1$ soit $b = -n + 2$.

Exercice 9

Soit P un polynôme tel que le reste de la division de $P(x)$ par $x + 1$ est 2 et le reste de la division de $P(x)$ par $x - 1$ est -4.
Quel est le reste de la division de $P(x)$ par $x^2 - 1$?

P est un polynôme tel que le reste de la division de $P(x)$ par $x + 1$ est 2 donc $P(x) = (x+1)Q_1(x) + 2$.
P est un polynôme tel que le reste de la division de $P(x)$ par $x - 1$ est -4 donc $P(x) = (x-1)Q_2(x) - 4$.
De plus, $P(x) = (x^2 - 1)Q(x) + ax + b$ car $deg(R(x)) < 2$.
On en déduit le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} P(-1) = 2 & = & -a + b \\ P(1) = -4 & = & a + b \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -3 \\ b & = & -1 \end{array}\right.$$

Exercice 10

Factoriser les polynômes suivants.

1. $P_1(x) = 3x^3 + x^2 = x^2(3x + 1)$ et $P_2(x) = (3x + 1)(x^2 + 1)$.
2. $P_3(x) = x^4 - 6x^2 + 8 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 2)(x + 2)$.
3. $P_4(x) = x^4 - x^2 - 12 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 3)$.
4. $P_5(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x + 20$ (vérifier que -2 est une racine).

	-2	-3	12	20
-2		4	-2	-20
	-2	1	10	0

$P(x) = (x+2)(-2x^2 + x + 10) = -2(x+2)^2(x - \frac{5}{2})$