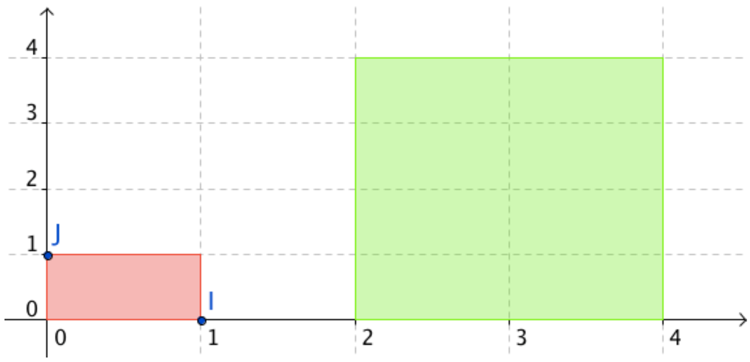
CALCUL INTÉGRAL

I/ Intégrale et aire

A) Unité d'aire

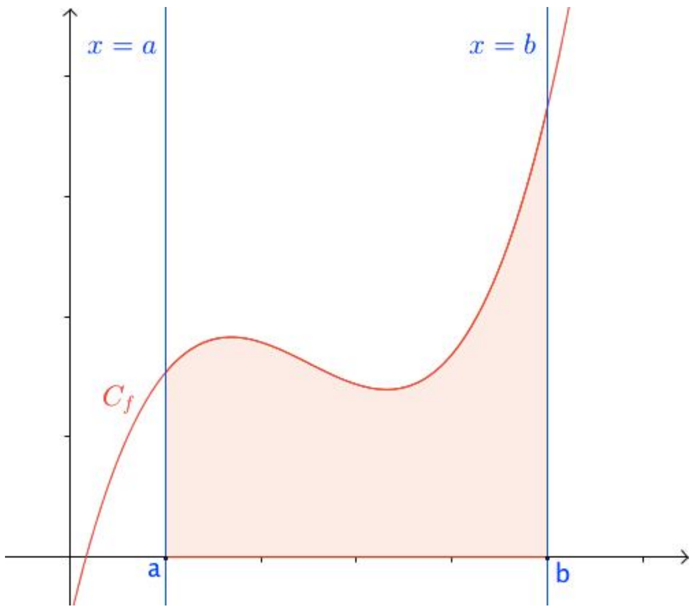


Dans le repère orthogonal (O, I, J), le rectangle rouge a comme dimension 1 sur 1. Il s'agit du rectangle "unité" qui a pour aire 1 unité d'aire. On écrit 1 u.a.
L'aire du rectangle vert est égale 8 fois l'aire du rectangle rouge.
L'aire du rectangle vert est donc égale à 8 u.a.
Lorsque les longueurs unitaires sont connues, il est possible de convertir les unités d'aire en unités de mesure (le cm^2 par exemple).
Si le repère est orthonormé, le rectangle « unité » est alors particulier : c'est un carré.

B) Définition

Définition : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a ; b]$.
On appelle intégrale de f sur $[a ; b]$ l'aire, exprimée en u.a., de la zone délimitée par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

Remarque : Au lieu de zone, on peut dire surface à condition de ne pas confondre le mot aire (qui est une mesure) avec le mot surface qui est une partie du plan (dans la vie courante, surface est souvent utilisé à la place de aire ou de superficie)



C) Notation

L'intégrale de la fonction f sur $[a ; b]$ se note : $\int_a^b f(x)dx$
Et on lit "intégrale de a à b de " $f(x)dx$

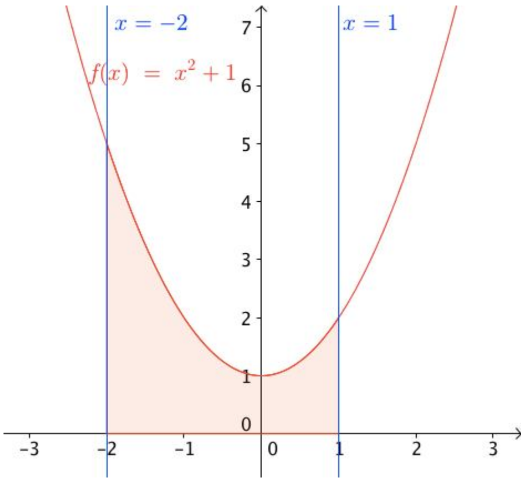
Cette notation est due au mathématicien allemand *Leibniz* (1646 ; 1716).
Ce symbole fait penser à un "S" allongé et s'explique par le fait que l'intégrale est égale à une aire calculée comme **s**omme infinie d'autres aires.
Plus tard, un second mathématicien allemand, *Bernhard Riemann* (1826 ; 1866) établit une théorie aboutie du calcul intégral.

Remarques :

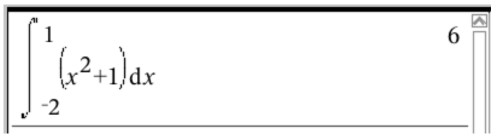
a et b sont appelés les bornes d'intégration, x est la variable.
Elle peut être remplacée par toute autre lettre car cette variable n'intervient pas.
Ainsi on peut écrire : .$\int_a^b f(x)dx$ = $\int_a^b f(t)dt$

Exemple :

L'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction $f(x)=x^2+1$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-2$ et $x=1$ est l'intégrale de la fonction f sur l'intervalle [-2 ; 1] et se note .$\int_{-2}^{1} t^2+1\,dt$ ou au choix $\int_{-2}^{1} x^2+1\,dx$



Un logiciel de calcul formel peut permettre d'obtenir l'aire cherchée.

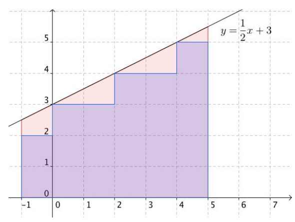


Méthode : Déterminer une intégrale par calculs d'aire

a) Tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x)=\frac{1}{2}x+3$.

b) Calculer .$\int_{-1}^{5} f(x)dx$

a)

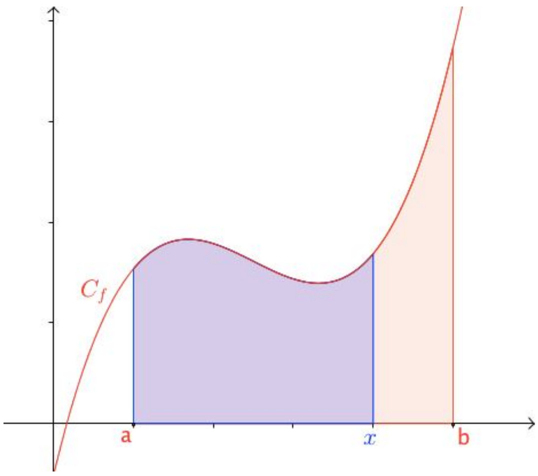


b) Calculer $\int_{-1}^{5} f(x)dx$ revient à calculer l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de la fonction f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=-1$ et $x=5$.
Plusieurs méthodes possibles pour calculer cette aire, on peut presque compter les carreaux : le calcul d'aire donnant 24 u.a, on en déduit que $\int_{-1}^{5} f(x)dx$ = 24

D) Fonction définie par une intégrale

Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.
La fonction F définie sur $[a\ ;\ b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a\ ;\ b]$ et sa dérivée est la fonction f.

Remarque : La fonction F est une primitive de la fonction f.

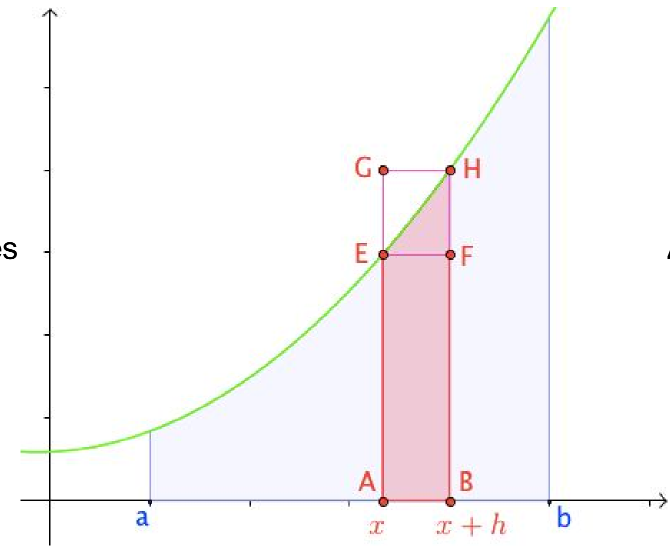


Démonstration dans le cas où f est strictement croissante :

- On considère deux réels x et $x+h$ de l'intervalle $[a\ ;\ b]$ avec $h > 0$.

On veut démontrer que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.

$F(x+h)-F(x) = \int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx$.



Cette différence est égale à l'aire de la surface colorée en rouge.

Elle est comprise entre les aires des rectangles ABFE et ABHG puisque f est une fonction croissante sur $[a\ ;\ b]$.
Appliquons les formules d'aire de rectangles

$Aire(ABFE) = h\times f(x)$

$Aire(ABHG) = h\times f(x+h)$.

On en déduit :

$h\times f(x) < F(x+h)-F(x) < h\times f(x+h)$

Puisque $h > 0$, on a :

$f(x) < \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} < f(x+h)$.

Comme f est continue sur $[a\ ;\ b]$, $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$.

Dans le cas où $h < 0$, la démonstration est analogue (les encadrements sont inversés).
On en déduit que F est dérivable sur [a;b] et que pour tout x de [a;b] , $F'(x) = f(x)$.
On admettra que le résultat est vrai même si la fonction n'est pas monotone.

Méthode : Étudier une fonction définie par une intégrale

Soit F la fonction définie sur [0 ; 10] par $F(x) = \int_0^x \frac{t}{2} dt$.
a) Etudier les variations de F.
b) Tracer sa courbe représentative.

a) f définie par $f(t) = \frac{t}{2}$ est continue et positive sur [0 ; 10] donc F est dérivable sur [0 ; 10] et sa dérivée est précisément la fonction f. Pour tout réel de [0 ; 10], $F'(x) = f(x) = \frac{x}{2}$

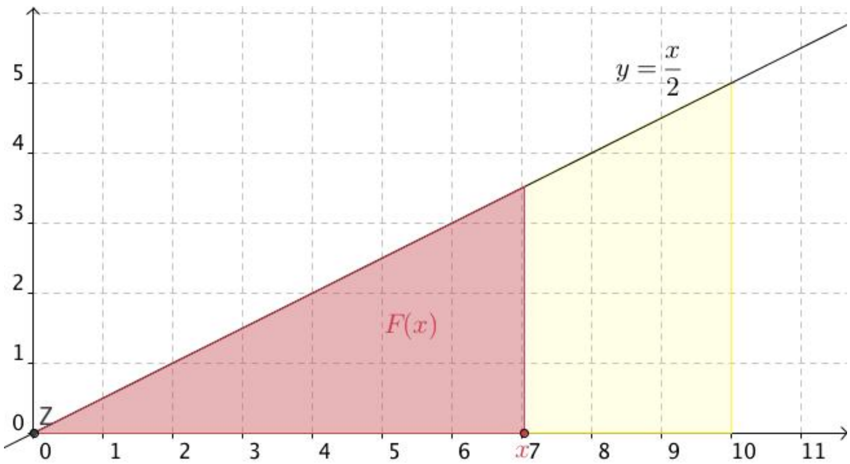
On peut en déduire que F est croissante sur [0 ; 10], ce qui n'est pas très étonnant graphiquement.

On dresse le tableau de variations :

x	0		10
$F'(x)$	0	+	5
$F(x)$	0	↗	25

$F(x)$ est égal à l'aire du triangle rouge.

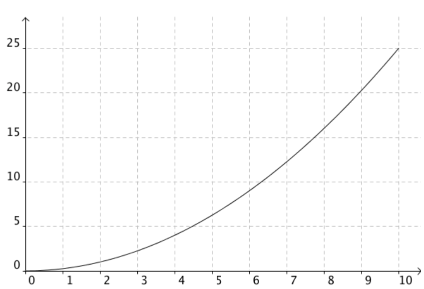
$$F(10) = \frac{10 \times 5}{2} = 25\ u.a.$$



b) Pour tout x de [0 ; 10], on a

$$F(x) = \frac{x \times \frac{x}{2}}{2} = \frac{x^2}{4}\ u.a.$$

On a ainsi la représentation graphique de F : On peut vérifier que F est dérivable sur [0 ; 10] et que sa dérivée est bien la fonction f, en d'autres termes on vérifie que F est une primitive de f.



II/ Primitive d'une fonction continue

A) Définition et propriétés

Exemple :
On considère les fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x+3$ et $F(x) = x^2+3x$
On constate que F est dérivable sur et que pour tout réel x, $F'(x)=f(x)$.
On dit dans ce cas que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Définition : f est une fonction continue sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I telle que $F'=f$

Remarque :
Attention, si l'on sait que Fet G sont des primitives de la même fonction f, ne pas en déduire que $F = G$.
Exemple : La fonction G définie par $G(x)=x^2+3x+58$ est aussi une primitive de f (exemple précédent)

Propriété 1 : f est une fonction continue sur un intervalle I.
Si F est une primitive de f sur I alors pour toute constante réelle C, la fonction $x \rightarrow F(x) + C$ est aussi une prim itive de f sur I.

Démonstration :
F est une primitive de f.
On pose $G(x)=F(x)+C$.
$G'(x)=F'(x)+0= F'(x)=f(x)$
Donc G est aussi une primitive de f.

Propriété 2 : f est une fonction continue sur un intervalle I et F_0 est une primitive de f sur I.
Si F est une primitive de f sur I , alors F est nécessairement définie par $F(x)= F_0(x) + C$ où C est une constante réelle.

Démonstration :
F et F_0 ont la même dérivée f puisque ce sont toutes les deux des primitives de f sur l'intervalle I.
On en déduit que $F'-F'_0 = 0$ et donc que $(F-F_0)'=0$.
La fonction $F-F_0$ a pour dérivée la fonction nulle, donc $F-F_0$ est une fonction constante.
Il existe donc un réel C tel que pour tout x de I , $F(x)-F_0(x)=C$, d'où le résultat.

Application : On sait que la fonction H est une primitive de la fonction cube et que $H(1)=3$.
On veut expliciter la fonction H.
Méthode : On cherche d'abord une primitive de la fonction cube. En tâtonnant, on trouve par exemple que $F(x) = \frac{1}{4}x^4$ est une primitive de la fonction cube. D'après la propriété 2, on sait qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout réel x, $H(x)= F(x)+C$.
En particulier, $H(1)= F(1)+C$. On en déduit que $3=\frac{1}{4}+C$. Un calcul simple permet de trouver C.
Conclusion : L'expression de la fonction H est $H(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{11}{4}$ *(on vérifie en calculant H(1) et en dérivant)*

Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.

Voir démonstration de xmathfree - Ceci est un théorème d'existence. Il assure l'existence. L'unicité est bien sûr fausse d'après la propriété 1

Remarque : Bien que l'existence soit assurée, la forme explicite d'une primitive n'est pas toujours connue. Par exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ ne possède pas de primitive sous forme explicite. De même, la fonction inverse définie sur R+* admet une primitive sur cet intervalle et on a cherché historiquement à trouver une primitive sous forme explicite pour se rendre compte que c'était impossible avec les connaissances de l'époque, d'où la création de la fonction logarithme népérien qui a précédé la découverte de la fonction exp.

B) Primitives des fonctions usuelles

Fonction	Une primitive	Intervalle
$f(x)=a$, $a\in\mathbb{R}$	$F(x)=ax$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $n>1$ entier	$F(x)=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	
$f(x)=x^n$ $n<-1$ entier	$F(x)=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x)=\sqrt{x}$	$]0;+\infty[$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$F(x)=\ln x$	$]0;+\infty[$
$f(x)=e^x$	$F(x)=e^x$	
$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$	
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$	

C) Linéarité des primitives

Propriété : f et g sont deux fonctions continues sur $[a\ ;\ b]$.
Si F est une primitive de f et G est une primitive de g sur $[a\ ;\ b]$ alors :
$F+G$ est une primitive de $f+g$,
kF est une primitive de kf avec k réel.

Démonstration :

$(F+G)'=F'+G'=f+g$

$(kF)'=kF'=kf$

D) Opérations et fonctions composées

u est une fonction dérivable sur un intervalle I

Fonction	Une primitive	Conditions
$u'u^n$ n entier non nul $n\neq -1$	$\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$	Lorsque n est négatif, $u(x)\neq 0$.
$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u}$	$u(x)>0$
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln u$	$u(x)>0$
$u'e^u$	e^u	*aucune*
$x\mapsto a\cos(ax+b)$	$x\mapsto\sin(ax+b)$	*aucune*
$x\mapsto a\sin(ax+b)$	$x\mapsto\cos(ax+b)$	*aucune*

.

Il n'est pas très utile d'apprendre par cœur ces tableaux si l'on ne connaît pas très bien les dérivées. L'essentiel est de dériver systématiquement pour vérifier.

Méthode : Recherche de primitives

Dans chaque cas, déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle I.

a) $f(x)=x^3-2x$ sur $I=\mathbb{R}$

b) $f(x)=xe^{x^2}$ sur $I=\mathbb{R}$

c) $f(x)=3x^2-\dfrac{3}{x^3}$ sur $I=\left]0;+\infty\right[$

d) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ sur $I=\mathbb{R}$

e) $f(x)=\cos(2x)-3\sin(3x-1)$ sur $I=\mathbb{R}$

f) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+2}$ sur $I=\mathbb{R}$

a) Une primitive est par exemple $F(x)=\dfrac{1}{4}x^4-x^2+5$

b) $f(x)=xe^{x^2}=\dfrac{1}{2}\times 2xe^{x^2}$ donc une primitive est par exemple $F(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}$

c) $f(x)=3x^2-\dfrac{3}{x^3}=3x^2-3x^{-3}$ donc une primitive est $F(x)=x^3-3\times\dfrac{1}{-2}x^{-2}=x^3+\dfrac{3}{2x^2}$

d) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$ donc une primitive est $F(x)=\sqrt{x^2+1}$

e) $f(x)=\dfrac{1}{2}\times 2\cos(2x)-3\sin(3x-1)$ donc une primitive est $F(x)=\dfrac{1}{2}\sin(2x)+\cos(3x-1)$

f) $f(x)=\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2x}{x^2+2}$ donc une primitive est $F(x)=\dfrac{3}{2}\ln\left(x^2+2\right)$

III/ Calcul d'intégrales

1) Définition

Propriété : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a\,;\,b]$.

Si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$.

Démonstration :

La dérivée de la fonction G définie sur $[a\,;\,b]$ par $G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est la fonction f.
Donc G est une primitive de f sur $[a\,;\,b]$.

Si F est une primitive de f alors pour tout x de $[a\,;\,b]$, on a $G(x)=F(x)+k$, k constante réelle.

$G(a)=\int_a^a f(t)\,dt=0$ d'une part et $G(a)=F(a)+k$ d'autre part.

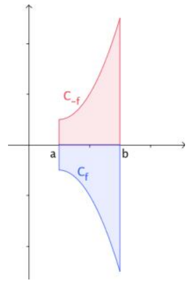
Donc $F(a)=-k$. On peut donc écrire $G(x)=F(x)-F(a)$
Appliquons cette égalité pour $x=b$, on obtient :
$G(b)=F(b)-F(a)$, ce qu'il fallait démontrer.

Par souci de généralisation, on va définir l'intégrale d'une fonction continue à l'aide de cettedernièr e formule pour des fonctions continues de signe négatif ou même de signe variable.
De plus les bornes a et b ne seront plus forcément rangées en ordre croissant.

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I et F une primitive quel conque de f sur l'intervalle I.

On appelle intégrale de f de a à b la différence $F(b)-F(a)$ notée $\int_a^b f(x)\,dx$.

Remarques :
La définition est ainsi étendue à des fonctions de signe quelconque.
Ainsi pour une fonction f négative sur [a ; b] ayant pour primitive F, on peut écrire en notant $G = -F$ qui est une primitive de la fonction $-f$.



$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$
$$= -\left(G(b) - G(a)\right)$$
$$= -\int_a^b \left(-f(x)\right)dx$$

Cette dernière expression est l'opposé de l'intégrale de la fonction positive $-f$ sur [a ; b]

D'autre part, si on permute les bornes, il est évident que l'intégrale change de signe.

Notations :

On écrit : $\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$

Méthode : Calculer une intégrale à partir d'une primitive

Calculer : $A = \int_2^5 \left(3x^2 + 4x - 5\right)dx$ $\quad B = \int_{-1}^1 e^{-2x}\,dx$ $\quad C = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 3}dx$

$$A = \int_2^5 \left(3x^2 + 4x - 5\right)dx$$
$$= \left[x^3 + 2x^2 - 5x\right]_2^5$$
$$= 5^3 + 2\times 5^2 - 5\times 5 - \left(2^3 + 2\times 2^2 - 5\times 2\right)$$
$$= 125 + 50 - 25 - \left(8 + 8 - 10\right)$$
$$= 144$$

$$B = \int_{-1}^1 e^{-2x}dx$$
$$= \left[\frac{1}{-2}e^{-2x}\right]_{-1}^1$$
$$= \frac{1}{-2}e^{-2\times 1} - \frac{1}{-2}e^{-2\times(-1)}$$
$$= -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}e^2$$
$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2}$$

$$C = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 3}dx$$
$$= \left[\ln\left(e^x + 3\right)\right]_0^1$$
$$= \ln\left(e^1 + 3\right) - \ln\left(e^0 + 3\right)$$
$$= \ln\left(e + 3\right) - \ln 4$$
$$= \ln\left(\frac{e+3}{4}\right)$$

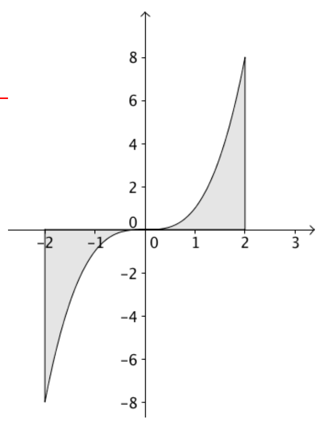
Propriétés : Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.

a) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

b) $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

a) $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$

b) $\int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) = -\left(F(b) - F(a)\right) = -\int_a^b f(x)dx$



Remarque :
Si une intégrale est nulle, alors la fonction n'est pas nécessairement nulle.
Par exemple :

$$\int_{-2}^2 x^3dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-2}^2 = \frac{1}{4}\times 2^4 - \frac{1}{4}\times(-2)^4 = 4 - 4 = 0$$

2) Relation de Chasles

Propriétés : Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; a, b et c trois réels de I.

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

Démonstration :

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$
$$= F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$$
$$= F(b) - F(a)$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx$$

2) Linéarité

Propriété : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I.

a) Pour k réel, $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

b) $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

Démonstration :
On applique les propriétés sur les primitives :

- kF est une primitive de kf
- $F+G$ est une primitive de $f+g$

Méthode : Calculer une intégrale en appliquant la linéarité

On pose : $A = \int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$ et $B = \int_0^{2\pi} \sin^2 x\,dx$

a) Calculer $A+B$ et $A-B$.
b) En déduire A et B.

a) On calcule en appliquant les formules de linéarité :

$$A+B = \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 x\right)dx + \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 x\right)dx$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 x + \sin^2 x\right)dx$$
$$= \int_0^{2\pi} 1dx$$
$$= [x]_0^{2\pi}$$
$$= 2\pi - 0$$
$$= 2\pi$$

$$A-B = \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 x\right)dx - \int_0^{2\pi} \left(\sin^2 x\right)dx$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx$$
$$= \int_0^{2\pi} \left(\cos 2x\right)dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2}\sin\left(2\times 2\pi\right) - \frac{1}{2}\sin\left(2\times 0\right) = 0$$

b) On a ainsi :

$\begin{cases} A+B = 2\pi \\ A-B = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2A = 2\pi \\ A = B \end{cases}$ soit : $A = B = \pi$.

3) Inégalités

Propriétés : Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I ; a et b deux réels de I avec $a \leq b$.

a) Si, pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

b) Si, pour tout x de $[a;b]$, $f(x) \geq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

Démonstration :
a) Par définition, lorsque f est positive, l'intégrale de f est une aire donc est positive.
b) Si $f(x) \geq g(x)$ alors $f(x) - g(x) \geq 0$.

Donc en appliquant a), on a : $\int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx \geq 0$.

Par linéarité, on a $\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx \geq 0$ et donc $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

Méthode : Encadrer une intégrale

a) Démontrer que pour tout x de [0 ; 1], on a $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) En déduire que $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e - 1$.

a) Sur [0 ; 1], $x^2 \leq x$.
Comme la fonction exponentielle est croissante et positive sur $\mathbb{R}$, on a $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

b) On déduit de la question précédente que $\int_0^1 0\,dx \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq \int_0^1 e^x dx$.
$\int_0^1 0\,dx = 0$ et $\int_0^1 e^x dx = \left[e^x\right]_0^1 = e - 1$

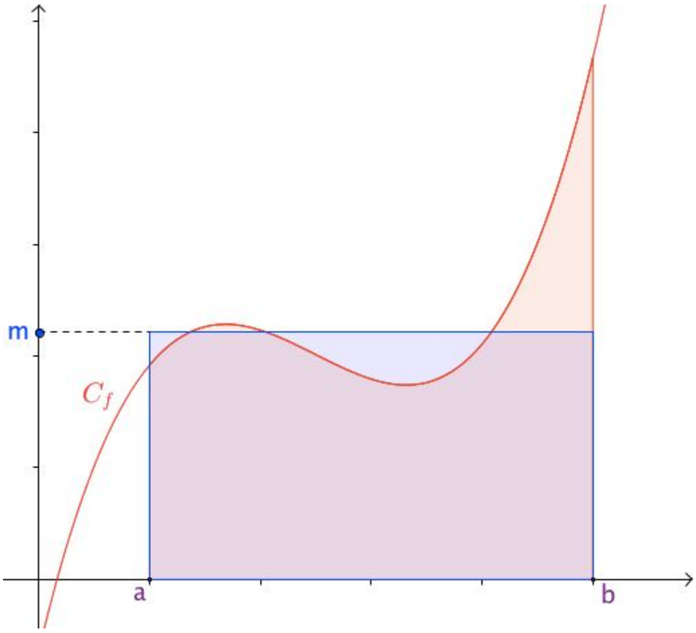
D'où $0 \leq \int_0^1 e^{x^2}\,dx \leq e - 1$

II. Valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b] avec $a \neq b$.

On appelle valeur moyenne de f sur [a ; b] le nombre réel $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Interprétation géométrique dans le cas d'une fonction continue et positive
L'aire sous la courbe représentative de f (en rouge ci-dessous) est égale à l'aire sous la droite d'équation $y = m$ (en bleu).



Exemple :

Calculons la valeur moyenne de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2 - 4x + 5$ sur l'intervalle [0 ; 10].

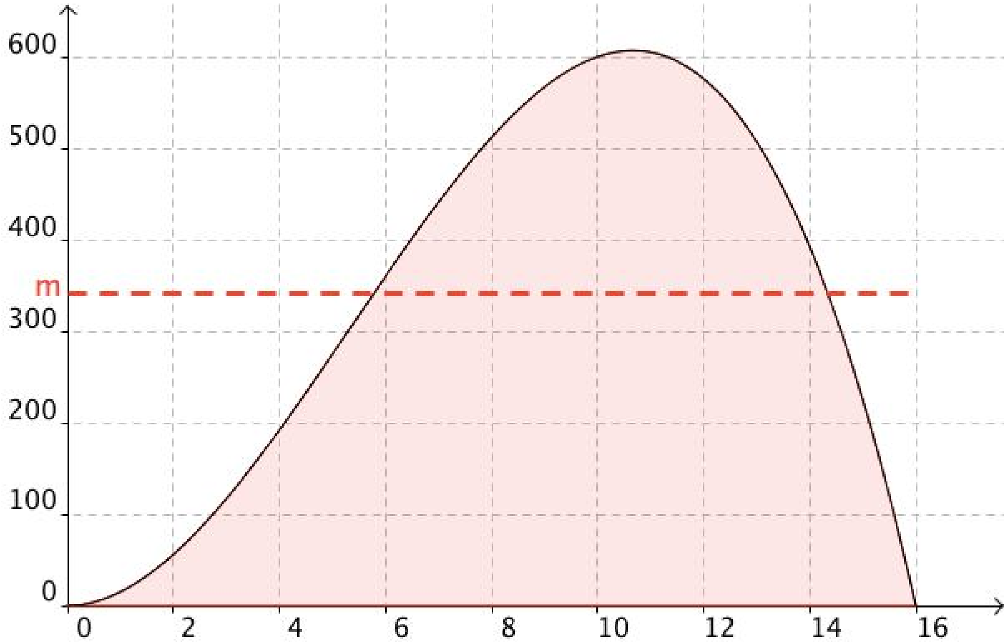
$$m = \frac{1}{10-0}\int_0^{10}\left(3x^2 - 4x + 5\right)dx$$
$$= \frac{1}{10}\left[x^3 - 2x^2 + 5x\right]_0^{10}$$
$$= \frac{1}{10}(1000 - 200 + 50)$$
$$= 85$$

Méthode : Calculer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.

On modélise à l'aide d'une fonction le nombre de malades lors d'une épidémie.
Au x-ième jour après le signalement des premiers cas, le nombre de malades est égale à $f(x) = 16x^2 - x^3$.
Déterminer le nombre moyen de malades chaque jour sur une période de 16 jours.

$$m = \frac{1}{16-0}\int_0^{16} f(x)dx$$
$$= \frac{1}{16}\int_0^{16}\left(16x^2 - x^3\right)dx$$
$$= \frac{1}{16}\left[\frac{16}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{16}$$
$$= \frac{1}{16}\left(\frac{16}{3}\times 16^3 - \frac{1}{4}\times 16^4\right)$$
$$= \frac{16^3}{3} - \frac{16^3}{4}$$
$$= \frac{16^3}{12}$$
$$= \frac{1024}{3} \approx 341$$

Le nombre moyen de malades chaque jour est environ égal à 341.



Exemple 2 : La valeur moyenne d'une fonction a un sens même avec des fonctions continues changeant de signe. Utiliser un tableur et prevoir une première colonne dans laquelle figureront 1000 réels choisis aléatoirement entre -1 et 2. La deuxième colonne contiendra les cubes de ces nombres. Entrer une formule donnant la moyenne de ces cubes. Répéter l'expérience plusieurs fois. Calculer alors la valeur moyenne de la fonction cube sur l'intervalle -1; 2 et comparer avec les moyennes obtenues avec le tableur.

D) Encadrement de l'intégrale d'une fonction monotone et positive

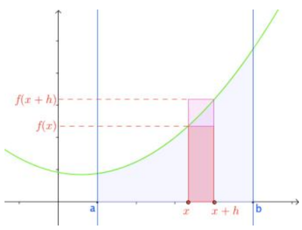
Soit une fonction f continue, positive et monotone sur un intervalle [a ; b].

On partage l'intervalle [a ; b] en n sous-intervalles de même amplitude $l = \dfrac{b-a}{n}$.

Sur un sous-intervalle $[x;x+l]$, l'aire sous la courbe est comprise entre l'aire de deux rectangles :

- l'un de dimension l et $f(x)$ qui a pour aire l x $f(x)$;
- l'autre de dimension l et $f(x+h)$ qui a pour aire l x $f(x+h)$.

Sur l'intervalle [a ; b], l'aire sous la courbe est comprise entre la somme des n rectangles "inférieurs" et la somme des n rectangles "supérieurs".



Voici un algorithme écrit en langage naturel permettant d'obtenir un tel encadrement.

Langage naturel
Entrée Saisir les réels a et b

```
Saisir l'entier n

Initialisation
Affecter à L la valeur (b-a)/n
Affecter à x la valeur a
Affecter à m la valeur 0
Affecter à p la valeur 0

Traitement des données
Pour i allant de 0 à n-1
    Faire
       Affecter à m la valeur m+Lxf(x)
       Affecter à x la valeur x+L
       Affecter à p la valeur p+Lxf(x)

Sortie
Afficher m et p
```

Exemple :

Avec le logiciel Algobox, rédiger le programme pour la fonction *f* définie par $f(x) = x^2$.

On exécute plusieurs fois le programme pour obtenir un encadrement de l'intégrale de la fonction car ré sur [1 ; 2].

En augmentant le nombre de sous-intervalles, la précision du calcul s'améliore car l'encadrement for mé de rectangles inférieurs et supérieurs se resserre autour de la courbe.