Comment trouver une primitive non évidente

<u>Exemple</u> : On veut trouver une primitive de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$

$$g(x)=(2x-1)(2x^2-2x+3)^3$$

Quelle que soit la méthode choisie, on n'est pas obligé d'expliquer comment on a trouvé une primitive. En revanche, donner une primitive fausse est souvent sanctionné sévèrement puisqu'un calcul direct de dérivée permet de savoir si la primitive obtenue est correcte ou non.

<u>Méthode 1</u> : Après observation, l'objectif est d'écrire g sous la forme

$g=ku'u^n$ où k est une constante à trouver et u une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction u est obligatoirement définie par $u(x)=2x^2-2x+3$.

L'entier n est obligatoirement égal à 3. $n=3$

Comme $u'(x)=4x-2$, on constate que l'on a intérêt à remarquer que

$2x-1=\frac{1}{2}(4x-2)$.

La suite est facile :

$g(x)=\frac{1}{2}(4x-2)(2x^2-2x+3)^3$, donc $g=\frac{1}{2}u'u^3$.

Une primitive de $u'u^3$ est la fonction $\frac{u^4}{4}$, donc

Une primitive de $\frac{1}{2}u'u^3$ est la fonction $\frac{1}{2}\frac{u^4}{4}=\frac{1}{8}u^4$

<u>Conclusion</u> : Une primitive de g est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x)=\frac{1}{8}(2x^2-2x+3)^4$$

<u>Méthode 2</u> : Au '"feeling", on tente la fonction T définie par :

$T(x)=(2x^2-2x+3)^4$

En dérivant directement, on obtient $T'(x)=4(4x-2)(2x^2-2x+3)^3$

Soit en factorisant par 2, $\quad T'(x)=8(2x-1)(2x^2-2x+3)^3$

On constate que la fonction *T* ne convient pas mais qu'en la divisant par 8, la dérivée sera précisément la fonction *g*.

Conclusion : Une primitive de *g* est la fonction *G* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(x)=\frac{1}{8}(2x^2-2x+3)^4$$

Voici deux autres exemples

• Recherche pratique d'une primitive :

Pour les fonctions usuelles, on utilise directement les formules.

Pour autres fonctions, il faut d'abord identifier la «forme» qui ressemble le plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on utilise directement la formule correspondante. Dans le cas contraire, on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction f et on rectifie en multipliant par le coefficient adéquat. ► *Exemples :*

1) Soit f définie par $f(x)=\cos\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)$. f est continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet donc des primitives.

On cherche à utiliser la «forme» $u'\cos u$ (dont une primitive est $\sin u$).

La «forme exacte» serait $\underbrace{4}_{u'}\underbrace{\cos\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)}_{\cos u}$. On écrit donc que $f(x)=\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{coefficient}}\times\underbrace{4\cos\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)}_{\text{forme exacte}}$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc F définie par $F(x)=\underbrace{\frac{1}{4}}_{\text{coefficient}}\times\underbrace{\sin\left(4x+\frac{\pi}{6}\right)}_{\sin u}$.

2) Exemple «classique» : primitive sur $]0;+\infty[$ de f définie par $f(x)=\frac{\ln x}{x}$.

Il suffit d'écrire que $f(x)=\frac{1}{x}\times\ln x$. On a alors la forme exacte $u'u$ (dont une primitive est $\frac{u^2}{2}$).

Une primtive de f sur $]0;+\infty[$ est donc F définie par $F(x)=\frac{(\ln x)^2}{2}$.

• Détermination d'une primitive dont on connaît la forme :

► *Exemple :*

Soit f définie par $f(x)=(4x+1)e^x$. On demande de chercher une primitive de f sur $\mathbb{R}$ sous la forme d'une fonction F définie par $F(x)=(ax+b)e^x$. Il suffit de dire que l'on doit avoir, pour tout x, $F'(x)=f(x)$.

Ce qui donne : $ae^x+(ax+b)e^x=(4x+1)e^x$ (pour tout x) $\Leftrightarrow ax+(a+b)=4x+1$ (pour tout x)

D'où, on doit avoir $a=4$ et $a+b=1$ (par identification des deux polynômes).

On obtient $a=4$ et $b=-3$. Une primitive est donc F définie par $F(x)=(4x-3)e^x$.

Les deux tableaux suivants peuvent être imprimés, découpés et collés dans votre cahier de cours.

Ces deux tableaux contiennent des primitives liées à la composée avec des fonctions trigonométriques.

Primitives des fonctions usuelles

f définie par	primitives sur I	I
$f(x) = a$	$F(x) = ax + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}; n > 1)$	$F(x) = \dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + C$	$]0;+\infty[$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$F(x) = \tan x + C$	$\left]-\dfrac{\pi}{2} + k\pi; +\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$F(x) = \ln x + C$	$]0;+\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x + C$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R}; \alpha \neq -1)$	$F(x) = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$]0;+\infty[$

Primitives : formules générales

forme de f	primitives de f	exemples
$f(x) = \alpha U'(x) + \beta V'(x)$	$F(x) = \alpha U(x) + \beta V(x) + C$	$f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ $F(x) = x^3 + x^2 + x + C$
$f(x) = U'(x) \cdot [U(x)]^n$ $(n \in \mathbb{N})$	$F(x) = \dfrac{[U(x)]^{n+1}}{n+1} + C$	$f(x) = 4(4x+1)^2$ $F(x) = \dfrac{(4x+1)^3}{3} + C$
$f(x) = \dfrac{U'(x)}{[U(x)]^n}$ $(n \in \mathbb{N}; n > 1; U(x) \neq 0)$	$F(x) = \dfrac{-1}{(n-1)\,[U(x)]^{n-1}} + C$	$f(x) = \dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$ $F(x) = \dfrac{-1}{x^3+1} + C$
$f(x) = \dfrac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$ $(U(x) > 0)$	$F(x) = 2\sqrt{U(x)} + C$	$f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x+2}}$ $F(x) = 2\sqrt{3x+2} + C$
$f(x) = U'(x) \cdot \cos[U(x)]$	$F(x) = \sin[U(x)] + C$	$f(x) = 4x\cos(2x^2+1)$ $F(x) = \sin(2x^2+1) + C$
$f(x) = U'(x) \cdot \sin[U(x)]$	$F(x) = -\cos[U(x)] + C$	$f(x) = 5\sin(5x)$ $F(x) = -\cos(5x) + C$
$f(x) = \dfrac{U'(x)}{U(x)}$ $(U(x) \neq 0)$	$F(x) = \ln[U(x)] + C$ (si $U(x) > 0$) $F(x) = \ln[-U(x)] + C$ (si $U(x) < 0$)	$f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ $F(x) = \ln(x^2+1) + C$
$f(x) = U'(x) \cdot e^{U(x)}$	$F(x) = e^{U(x)} + C$	$f(x) = -2xe^{-x^2}$ $F(x) = e^{-x^2} + C$
$f(x) = U'(x) \cdot [U(x)]^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R}; \alpha \neq -1; U(x) > 0)$	$F(x) = \dfrac{[U(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$f(x) = 2x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}$ $F(x) = \dfrac{2}{5}(x^2+1)^{\frac{5}{2}} + C$