# Séquence 2

# Généralités sur les fonctions

## Sommaire



**Dans cette séquence, il s'agit d'une part d'introduire deux nouvelles fonctions usuelles (les fonction sinus et cosinus) et, d'autre part, de compléter et d'approfondir les bases de l'analyse qui seront nécessaires tout au long de l'année de terminale ainsi que dans le supérieur.**

# 1 Pré-requis

## A Limites

La notion de limites a été abordée dans la séquence sur les suites numériques. La notion de limites de fonction étant une extension du travail qui a été fait sur les suites, il est important d'avoir travaillé le chapitre correspondant, de s'être approprié le concept de limites et de maîtriser les méthodes vues pour déterminer les limites de suites.

## B Dérivation

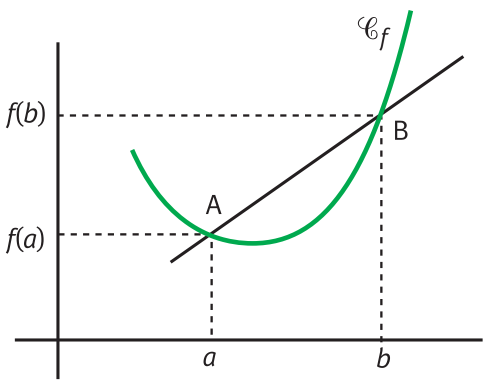
### 1. Taux d'accroissement

**Définition**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I contenant deux réels distincts $a$ et $b$.

On appelle taux d'accroissement (ou taux de variation) de la fonction $f$ entre $a$ et $b$ le réel $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

■ **Illustration graphique**




Soit $f$ une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

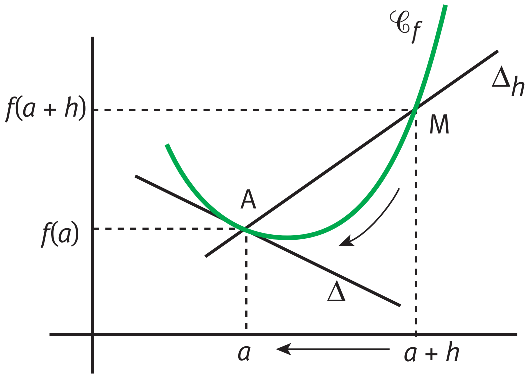
On note A et B les points de coordonnées respectives

$$\big(a\ ;\ f(a)\big) \text{ et } \big(b\ ;\ f(b)\big).$$

Le taux d'accroissement de la fonction $f$ entre $a$ et $b$ est égal au coefficient directeur de la droite (AB), à savoir

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

## 2. Nombre dérivé et tangente




Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I contenant un réel $a$.

On note A et M les points de coordonnées respectives $\big(a\,;\,f(a)\big)$ et $\big(a+h\,;\,f(a+h)\big)$ où $h$ est un réel non nul quelconque, aussi petit que l'on veut.

La droite $\Delta_h$ a pour coefficient directeur

$$\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Lorsque $h$ tend vers 0, le point M se déplace sur la courbe $\mathscr{C}_f$ se rapprochant de A et la droite $\Delta_h$ a pour position limite la droite $\Delta$ qui est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A.

La droite $\Delta$ a donc pour coefficient directeur la limite du nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque $h$ tend vers 0. Lorsqu'elle existe, cette limite est notée $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

### Définition

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I contenant un réel $a$.

On dit que $f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe et est finie.

Dans ce cas, on note $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.

Le réel $f'(a)$ ainsi défini est appelé **nombre dérivé** de $f$ en $a$.

***Remarque***

En posant $x = a+h$ ou encore $h = x-a$, on remarque d'une part que lorsque $h$ tend vers 0, $x$ tend vers $a$ et d'autre part que le nombre $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ s'écrit $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ainsi

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

On obtient donc une autre façon de noter le nombre $f'(a)$ lorsque $f$ est dérivable en $a$, à savoir $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

**Propriété**

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I contenant un réel $a$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet au point de coordonnées $(a\,;\,f(a))$ une tangente d'équation $y=f'(a)(x-a)+f(a)$.

### *Démonstration*

Avec les notations précédentes, on a vu que si $f$ est dérivable en $a$ alors, la tangente $\Delta$ à sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $a$ a pour coefficient directeur $f'(a)$.

Ainsi, $\Delta$ a pour équation $y=f'(a)\times x+p$ or $\Delta$ passe par le point A de coordonnées $(a\,;\,f(a))$ d'où $f(a)=f'(a)\times a+p$ ce qui permet d'en déduire que $p=f(a)-f'(a)\times a$.

Finalement, $\Delta$ a pour équation $y=f'(a)x+f(a)-f'(a)\times a$ ou encore

$$y=f'(a)(x-a)+f(a).$$

***Remarques***

Avec les notations précédentes :

- la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au point A une tangente horizontale si et seulement si $f'(a)=0$ ;
- si $f$ n'est pas dérivable en $a$ mais si $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\pm\infty$ alors $\mathscr{C}_f$ admet au point A une (demi-) tangente verticale ;
- si $f$ n'est pas dérivable en $a$ mais si $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet des limites différentes à droite et à gauche de $a$, alors $\mathscr{C}_f$ admet au point A deux demi-tangentes distinctes et il apparaît donc en A un point anguleux.

## Exercice A

Dans chaque cas, étudier la dérivabilité de $f$ en $a$.

**a)** La fonction $f$ définie par $f(x)=\sqrt{x}$ et $a=0$.

**b)** La fonction $f$ définie par $f(x)=x\sqrt{x}$ et $a=0$.

**c)** La fonction $f$ définie par $f(x)=|x|$ et $a=0$.

**Solutions**

**a)** Pour $h \neq 0$, on a $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}$ or, lorsque $h$ tend vers 0, $\sqrt{h}$ tend vers 0 en étant positif donc $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$ (ce raisonnement concernant les limites sera précisé par la suite).

Finalement, $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = +\infty$ et $f$ n'est pas dérivable en 0. On note que graphiquement, la courbe représentant la fonction racine carrée admet à l'origine une tangente verticale.

**b)** Pour $h \neq 0$, on a $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{h\sqrt{h}}{h} = \sqrt{h}$ or, lorsque $h$ tend vers 0, $\sqrt{h}$ tend vers 0 donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 0$. La fonction $f$ est donc dérivable en 0 et on a $f'(0) = 0$. Graphiquement, la courbe représentant $f$ admet à l'origine une tangente horizontale.

**c)** Pour $h \neq 0$, on a $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{|h|}{h}$.

On remarque que, si $h > 0$, $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$ alors que si $h < 0$, $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$. Le taux d'accroissement $\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$ ne peut donc pas avoir de limite lorsque $h$ tend vers 0, la fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0.On remarque cependant que ce taux d'accroissement admet une limite égale à 1 à droite de 0 et égale à $-1$ à gauche de 0. La fonction $f$ est donc dérivable à droite de 0 et à gauche de 0. Graphiquement, on observe des demi-tangentes de coefficient directeur égal à 1 à droite de 0 et égal à $-1$ à gauche de 0. Au point d'abscisse 0, il y a donc un point anguleux.

# 3. Fonction dérivée et application à l'étude des variations

**Définition**

Une fonction $f$ est dite dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout réel de I.
La fonction qui a tout réel $x$ de I associe son nombre dérivé en $x$ est appelée fonction dérivée de $f$ et est notée $f'$.

## Notations

- Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I. La fonction $x \mapsto f'(x)$ définie sur I est notée $f'$ et appelée dérivée (première) de $f$.
- Si $f'$ est dérivable sur I, la fonction $(f')'$ est appelée dérivée seconde de $f$ et est notée $f''$.
- Si $f''$ est dérivable sur I, la fonction $(f'')'$ est appelée dérivée troisième de $f$ et est notée $f'''$ ou encore $f^{(3)}$.
- Si $f$ est $n$ fois dérivable sur I alors la dérivée $n$-ième de $f$ est notée $f^{(n)}$.
- On utilise parfois la notation différentielle $f' = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ que l'on peut aussi rencontrer en science physique sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, etc selon les noms donnés aux fonctions ou aux variables.

**Théorème**

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- La fonction $f$ est croissante sur $I$ si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \geq 0$.
- La fonction $f$ est décroissante sur I si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \leq 0$.
- La fonction $f$ est constante sur $I$ si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = 0$.

**Corollaire**

Soit $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant un réel $a$.

- Si $f$ admet un extremum local en $a$ alors $f'(a) = 0$.
- Si $f'$ s'annule en $a$ en changeant de signe alors $f$ admet un extremum local en $a$.

**Théorème**

- La fonction $f$ est strictement croissante sur un intervalle I si et seulement si $f'$ est strictement positive sur I sauf éventuellement en des réels isolés où elle s'annule.
- La fonction $f$ est strictement décroissante sur un intervalle I si et seulement si $f'$ est strictement négative sur I sauf éventuellement en des réels isolés où elle s'annule.

**Remarque** Dire qu'une fonction s'annule en des réels isolés d'un intervalle I revient à dire que, sur tout intervalle fermé borné inclus dans I, la fonction s'annule en un nombre fini de réels.

## 4. Formulaires

| fonction | fonction dérivée | sur |
|---|---|---|
| $x \mapsto a$ où $a \in \mathbb{R}$ | $x \mapsto 0$ | $\mathbb{R}$ |
| $x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{Z}$ | $x \mapsto nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ si $n \geq 0$<br>$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ si $n<0$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}$ | $x \mapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$ | $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ |
| $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ | $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ | $]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$ |
| $x \mapsto \sqrt{x}$ | $x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0\,;+\infty[$ |

| | fonction<br>$u$ et $v$ étant deux fonctions dérivables sur un même intervalle I | fonction dérivée |
|---|---|---|
| **Somme** | $u+v$ | $u'+v'$ |
| **Produit par un réel** | $ku$ où $k \in \mathbb{R}$ | $ku'$ |
| **Produit** | $uv$ | $u'v+uv'$ |
| **Inverse** | $\dfrac{1}{v}$ ($v$ ne s'annulant pas sur I) | $-\dfrac{v'}{v^2}$ |
| **Quotient** | $\dfrac{u}{v}$ ($v$ ne s'annulant pas sur I) | $\dfrac{vu'-v'u}{v^2}$ |

### Conséquences

- On appelle fonction polynomiale toute fonction $f$ définie par une expression de la forme :

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,$$

où les coefficients $a_i$ sont des réels.

Il découle du formulaire précédent que toute fonction polynomiale est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- On appelle fonction rationnelle toute fonction définie comme quotient de deux fonctions polynomiales. Autrement, toute fonction rationnelle $f$ est définie par une expression de la forme :

$$f(x)=\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1 x + b_0}$$

où les coefficients $a_i$ et $b_i$ sont des réels.

Il découle du formulaire précédent que toute fonction rationnelle est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition

## 5. Méthodes : dérivation et étude de signes

**Point méthode 2**

**Dériver méthodiquement une fonction**

Les formules à utiliser lors du calcul de dérivées de fonctions dépendent naturellement du type de fonctions dont on souhaite déterminer la dérivée. Dès lors, avant tout calcul de dérivée, il est primordial de déterminer le type d'expression de la fonction considérée : somme, fonction polynomiale, produit, inverse, quotient, fonction rationnelle, etc. Une fois cette étape franchit, on peut appliquer la formule correspondant au type d'expression de la fonction.

**Exercice B**

Justifier la dérivabilité puis calculer la dérivée de chacune des fonctions dont l'expression est donnée ci-dessous :

**a)** $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$ **b)** $g(x)=\dfrac{3-x^2}{x-2}$

**c)** $h(x)=x+2+x\sqrt{x}$ **d)** $i(x)=x^3+\dfrac{3}{x}$

**▶ Solutions**

**a)** La fonction $f$ est une fonction polynomiale donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2+3\times 2x-9=3x^2+6x-9$

**b)** La fonction $g$ est une fonction rationnelle définie sur $\left]-\infty\,;2\right[\cup\left]2\,;+\infty\right[$ donc $g$ est dérivable sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition. La fonction $g$ étant un quotient, on utilise la formule de dérivation des quotients : $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{vu'-v'u}{v^2}$.

Et, pour tout $x\neq 2$,

$$g'(x)=\frac{(x-2)\times(-2x)-1\times(3-x^2)}{(x-2)^2}=\frac{-x^2+4x-3}{(x-2)^2}.$$

**c)** La fonction $h$ est la somme des fonctions $x \mapsto x+2$ et $x \mapsto x\sqrt{x}$.

La fonction $x \mapsto x+2$ est une fonction affine (donc polynomiale) donc dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x\sqrt{x}$ est le produit des fonctions $x \mapsto x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et de $x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$. Par produit, $x \mapsto x\sqrt{x}$ est donc dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ puis, par somme, $h$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

Formules utilisées : $(u+v)' = u'+v'$ et $(uv)' = u'v+uv'$.

Pour tout $x>0$, $h'(x) = 1+1\times\sqrt{x}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1+\dfrac{3}{2}\sqrt{x}$ .

**d)** La fonction $i$ est la somme de la fonction cube dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynomiale et du produit de la constante 3 par la fonction inverse dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,;\,0[$ et $]0\,;\,+\infty[$.

La fonction $i$ est donc dérivable sur $]-\infty\,;\,0[$ et $]0\,;\,+\infty[$.

Formules utilisées : $(u+v)' = u'+v'$ et $(ku)' = ku'$.

Pour $x \neq 0$,

$$i'(x) = 3x^2+3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3x^4-3}{x^2} = \frac{3(x^4-1)}{x^2} = \frac{3(x-1)(x-1)(x^2+1)}{x^2}.$$

*Remarques*

- On notera que la rédaction permettant de justifier la dérivabilité d'une fonction est parfois lourde. Il nous arrivera donc de l'alléger mais il faudra garder à l'esprit qu'il est nécessaire de s'interroger sur la façon dont est construite la fonction à dériver, sur son type d'expression puisque, de cette analyse, découle les formules à utiliser.
- On verra au cours des exemples et des exercices jusqu'où aller dans la transformation de l'écriture de la dérivée en fonction de ce que l'on souhaite en faire.

## Exercice C

Soit $f$ la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = (x-1)\sqrt{x}$. On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle une tangente parallèle à la droite d'équation $y = x-5$ ? Si oui, en quel(s) point(s) ?

**▶ Solutions**

Le problème se ramène à déterminer les tangentes à $\mathscr{C}_f$ dont le coefficient directeur est égal à 1. Autrement dit, lorsque $f$ est dérivable, on est amené à résoudre l'équation $f'(x) = 1$.

La fonction $f$ est définie sur $]0\,;+\infty[$ comme le produit de la fonction $x \mapsto x-1$ affine donc dérivable sur $]0\,;+\infty[$ par la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ donc $f$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.

On applique la formule $(uv)' = u'v+uv'$.

Pour $x>0$, $f'(x) = 1\times\sqrt{x}+(x-1)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2\sqrt{x}\times\sqrt{x}+x-1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3x-1}{2\sqrt{x}}$.

Puis, sur $\left]0\,;\,+\infty\right[$,

$$f'(x)=1 \Leftrightarrow \frac{3x-1}{2\sqrt{x}}=1 \Leftrightarrow 3x-1=2\sqrt{x} \Leftrightarrow 3x-2\sqrt{x}-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=\sqrt{x} \\ 3X^2-2X-1=0 \end{cases}$$

or le trinôme $3X^2-2X-1$ a pour discriminant $\Delta=16$ et pour racines $-\frac{1}{3}$ et 1. Par suite $f'(x)=1 \Leftrightarrow \sqrt{x}=-\frac{1}{3}$ ou $\sqrt{x}=1$. L'équation $\sqrt{x}=-\frac{1}{3}$ n'a pas de solution réelle alors que sur $\left]0\,;\,+\infty\right[$, $\sqrt{x}=1 \Leftrightarrow x=1$.

Finalement, l'équation $f'(x)=1$ admet une unique solution qui est 1.

La courbe $\mathscr{C}_f$ admet donc une unique tangente de coefficient directeur 1, c'est la tangente au point de coordonnées (1 ; $f$(1)), c'est-à-dire (1 ; 0).

**Point méthode 2**

## Étudier méthodiquement le signe de la dérivée

Les variations d'une fonction pouvant se déduire du signe de la dérivée, un calcul de dérivée est généralement suivi d'une étude du signe de cette dernière.

Pour étudier le signe d'un expression, on commence par analyser le type d'expression dont on doit déterminer le signe. La démarche est alors algorithmique. Lorsque l'on a une somme de deux nombres positifs ou de deux nombres négatifs, on peut conclure sinon, il est nécessaire de se ramener en général à étudier le signe d'un produit (en factorisant) ou d'un quotient (en réduisant au même dénominateur) afin d'utiliser les règles de signes usuelles.

On peut par ailleurs être amené à utiliser les propriétés concernant les opérations sur les inégalités, la définition des variations d'une fonction ou les signes d'expressions usuelles (affine ou de degré 2).

Enfin, on verra dans certains cas, qu'il peut être nécessaire d'étudier le signe d'une fonction auxiliaire.

On rappelle les résultats suivants.

**Définition** *Variations d'une fonction*

La fonction $f$ est croissante sur un intervalle I si et seulement si, pour tous réels $a$ et $b$ de I tels que $a<b$, on a $f(a)\le f(b)$.

La fonction $f$ est strictement croissante sur un intervalle I si et seulement si, pour tous réels $a$ et $b$ de I tels que $a<b$, on a $f(a)<f(b)$.

La fonction $f$ est décroissante sur un intervalle I si et seulement si, pour tous réels $a$ et $b$ de I tels que $a<b$, on a $f(a)\ge f(b)$.

La fonction $f$ est strictement décroissante sur un intervalle I si et seulement si, pour tous réels $a$ et $b$ de I tels que $a<b$, on a $f(a)>f(b)$.

**Propriété** *Opérations sur les inégalités*

Pour tous réels $a$, $b$ et $c$ : $a \leq b \Leftrightarrow a+c \leq b+c$.

Pour tous réels $a$ et $b$ et $c$ un réel strictement positif : $a \leq b \Leftrightarrow ac \leq bc$.

Pour tous réels $a$ et $b$ et $c$ un réel strictement négatif : $a \leq b \Leftrightarrow ac \geq bc$.

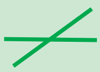
Pour tous réels $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que $a \leq b$ et $c \leq d$, on a $a+c \leq b+d$.

Pour tous réels positifs $a$, $b$, $c$ et $d$ tels que $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$, on a $ac \leq bd$.

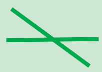
**Propriété** *Signe d'une expression affine*

Le tableau ci-dessous résume le signe de $mx+p$ en précisant l'orientation de la droite d'équation $y = mx+p$ ainsi que sa position par rapport à l'axe des abscisses. Le réel $x_0$ désigne $-\dfrac{p}{m}$.

**Cas où $m > 0$**

| $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $mx+p$  | $-$ | 0 | $+$ |

**Cas où $m < 0$**

| $x$ | $-\infty$ | $x_0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $mx+p$  | $+$ | 0 | $-$ |

**Propriété** *Signe d'une expression de degré 2*

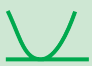
Le tableau ci-dessous résume le signe de $ax^2+bx+c$ en précisant l'orientation de la parabole d'équation $y=ax^2+bx+c$ ainsi que sa position par rapport à l'axe des abscisses. Le discriminant vaut $\Delta=b^2-4ac$. Si $\Delta>0$ alors le trinôme a deux racines réelles distinctes qui sont $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, si $\Delta=0$ alors le trinôme a une unique racine réelle qui est $x_0=-\dfrac{b}{2a}$ enfin, si $\Delta<0$ alors le trinôme n'a pas de racine réelle.

**Cas où $a>0$**

Cas où $\Delta>0$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $ax^2+bx+c$  | | + | 0 | − | 0 | + | |

Cas où $\Delta=0$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $ax^2+bx+c$  | | + | 0 | + | |

Cas où $\Delta<0$

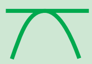
| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $ax^2+bx+c$  | | + | |

**Cas où $a<0$**

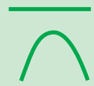
Cas où $\Delta>0$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $ax^2+bx+c$  | | − | 0 | + | 0 | − | |

Cas où $\Delta=0$

| $x$ | $-\infty$ | | $x_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $ax^2+bx+c$  | | − | 0 | − | |

Cas où $\Delta<0$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Signe de $ax^2+bx+c$  | | − | |

## Exercice D

Étudier les variations de chacune des fonctions dont on a déterminé la dérivée précédemment :

**a)** $f(x)=x^3+3x^2-9x+5$ ; **b)** $g(x)=\dfrac{3-x^2}{x-2}$ ;

**c)** $h(x)=x+2+x\sqrt{x}$ ; **d)** $i(x)=x^3+\dfrac{3}{x}$.

**▸ Solutions**

**a)** On sait que pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=3x^2+3\times 2x-9=3x^2+6x-9=3(x^2+2x-3)$$

Comme $f'(x)$ est du signe de $x^2+2x-3$.

On étudie ci-dessous le signe du trinôme qui a pour discriminant $\Delta = 16$ et pour racines $-3$ et $1$.

| x | $-\infty$ | | | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $x^2+2x-3$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

Ainsi, $f'(x) > 0$ sur $\left]-\infty\,;\,-3\right[ \cup \left]1\,;\,+\infty\right[$ et $f'(x) < 0$ sur $\left]-3\,;\,1\right[$ donc $f$ est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;\,-3\right]$ et sur $\left[1\,;\,+\infty\right[$ alors qu'elle est strictement décroissante sur $\left[-3\,;\,1\right]$.

On remarquera que l'étude du signe de la dérivée sur des ouverts permet d'en déduire les variations sur des fermés puisque ce qui se passe en les réels isolés $-3$ et $1$ n'a aucune incidence sur les variations de la fonction.

**b)** Pour tout $x \neq 2$, $g'(x) = \dfrac{(x-2)\times(-2x) - 1\times(3-x^2)}{(x-2)^2} = \dfrac{-x^2+4x-3}{(x-2)^2}$

On est amené à étudier le signe d'un quotient, on détermine donc le signe du numérateur et celui du dénominateur.

| x | $-\infty$ | $1$ | | $3$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $-x^2+4x-3$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |

Pour tout $x \neq 2$, $(x-2)^2 > 0$ donc $g'(x)$ est du signe du numérateur, à savoir $-x^2+4x-3$. Ce trinôme a pour discriminant $\Delta = 4$ puis pour racines 1 et 3.

Ainsi, $f'(x) < 0$ sur $\left]-\infty\,;\,1\right[ \cup \left]3\,;\,+\infty\right[$ et $f'(x) > 0$ sur $]1\,;\,3[$ donc $f$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty\,;\,1\right]$ et sur $\left[3\,;\,+\infty\right[$ alors qu'elle est strictement croissante sur $[1\,;\,3]$.

**c)** Pour tout $x > 0$, $h'(x) = 1 + 1\times\sqrt{x} + x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1 + \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$. Pour $x > 0$, $\sqrt{x} > 0$ donc $\dfrac{3}{2}\sqrt{x} > 0$ et $h'(x)$ est la somme de deux nombres strictement positifs d'où $h'(x) > 0$ sur $\left]0\,;\,+\infty\right[$ puis $h$ est strictement croissante sur $\left[0\,;\,+\infty\right[$.

On remarquera encore une fois que l'étude de la dérivée sur l'ouvert $\left]0\,;\,+\infty\right[$ permet de conclure concernant les variations sur le fermé $\left[0\,;\,+\infty\right[$.

**d)** Pour $x \neq 0$,

$$i'(x) = 3x^2 + 3\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{3x^4-3}{x^2} = \frac{3(x^4-1)}{x^2} = \frac{3(x-1)(x-1)(x^2+1)}{x^2}.$$

Lors du calcul de la dérivée, on remarque que l'on est amené à étudier le signe d'un quotient et donc, celui numérateur et du dénominateur. Le dénominateur étant strictement positif, on poursuit les transformations au numérateur en factorisant autant que possible jusqu'à parvenir à l'étude de signe d'expressions connues, ici deux expressions affines et une expression polynomiale de degré 2.

Pour tout $x \neq 0$, $x^2+1>0$ car somme de deux nombres strictement positifs. Donc $i\,'(x)$ est du signe du produit $(x-1)(x+1)$, expression polynomiale de degré 2 s'annulant en 1 et en $-1$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $(x-1)(x+1)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Finalement, $f\,'(x) > 0$ sur $\left]-\infty ; -1\right[ \cup \left]1 ; +\infty\right[$ et $f\,'(x) < 0$ sur $\left]-1 ; 1\right[$ donc $f$ est strictement croissante sur $\left]-\infty ; -1\right]$ et sur $\left[1 ; +\infty\right[$ alors qu'elle est strictement décroissante sur $\left[-1 ; 1\right]$.

# D Composée de fonctions

## 1. Objectifs

La notion de composée de fonctions n'a pas été abordée précédemment, il ne s'agit donc pas ici de faire des rappels d'une notion déjà rencontrée mais simplement de l'aborder sans formaliser car elle sera utilisée par la suite lors du calcul de limites ou de dérivées de fonctions.

## 2. L'idée

Prenons comme exemple la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+1}$. La fonction $f$ n'est pas une fonction usuelle. Pour la décomposer à l'aide fonction usuelle, il apparaît que l'on applique dans un premier temps la fonction polynomiale $u : x \mapsto x^2+1$ puis, dans un deuxième temps, la fonction racine carrée $v : x \mapsto \sqrt{x}$. Ainsi, la fonction $f$ s'obtient comme l'enchaînement des fonctions $v$ et $u$. On dit que $f$ est la composée de $u$ suivie de $v$ (ou que $f$ est la composée de $u$ par $v$).

**Exercice E**

❶ Une fonction $f$ est définie à l'aide des fonctions usuelles

$$h : x \mapsto \frac{1}{x},\ i : x \mapsto x^2,\ j : x \mapsto 3x-5 \text{ et } k : x \mapsto x+1.$$

**a)** L'image de $-1$ par $f$ vaut $-3{,}5$ et on dispose de l'enchaînement $-1 \mapsto 1 \mapsto 2 \mapsto 0{,}5 \mapsto -3{,}5$ donnant le détail du calcul de $f(-1)$. Pour chaque flèche, identifier la fonction de la liste ci-dessus qui permet de passer d'un nombre au suivant.

**b)** L'image de 3 par $f$ vaut $-4{,}7$. Retrouver le détail des calculs à l'aide de la décomposition obtenue au a).

**c)** Donner l'expression $f(x)$ en fonction de $x$.

**2** Sans se soucier du domaine de définition des fonctions, décomposer les fonctions suivantes en un enchaînement de fonctions usuelles.

**a)** $f(x)=2-\dfrac{1}{x+1}$  **b)** $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{x+2}}$

**c)** $f(x)=(x^3+x+1)^{10}$  **d)** $f(x)=1+\sqrt{x^2-x+3}$

**3** On dispose de l'algorithme ci-contre implémenté sous Algobox.

```
1   VARIABLES
2     X EST_DU_TYPE NOMBRE
3   DÉBUT_ALGORITHME
4     LIRE X
5     X PREND_LA_VALEUR X*X+2*X–3
6     X PREND_LA_VALEUR sqrt (x)
7     X PREND_LA_VALEUR 1/X
8     X PREND_LA_VALEUR 3–2*X
9     AFFICHER X
10  FIN ALGORITHME
```

**a)** Que fait l'algorithme lorsqu'on entre 4 ? 1 ? 0 ? $-5$ ?

**b)** Identifier les fonctions $f_5$, $f_6$, $f_7$ et $f_8$ apparaissant aux lignes 5, 6, 7 et 8 de l'algorithme puis préciser, à chaque étape, les conditions nécessaires successives sur $x$ pour pouvoir enchaîner les fonctions $f_5$, $f_6$, $f_7$ et $f_8$.

**c)** Modifier l'algorithme pour qu'il fonctionne quelles que soient les valeurs de $x$.

**d)** Exprimer $f(x)$ en fonction de $x$.

## ▸ Solutions

**1 a)** On observe l'enchainement suivant :

$$-1 \xmapsto{i} 1 \xmapsto{k} 2 \xmapsto{h} 0{,}5 \xmapsto{j} -3{,}5 \text{ où}$$

$$h: x \mapsto \frac{1}{x},\ i: x \mapsto x^2,\ j: x \mapsto 3x-5 \text{ et } k: x \mapsto x+1.$$

**b)** En utilisant la décomposition précédente, on a

$$3 \xmapsto{i} 9 \xmapsto{k} 10 \xmapsto{h} 0{,}1 \xmapsto{j} -4{,}7.$$

**c)** En raisonnant dans le cas général, on a

$$x \xmapsto{i} x^2 \xmapsto{k} x^2+1 \xmapsto{h} \frac{1}{x^2+1} \xmapsto{j} 3\times\frac{1}{x^2+1}-5$$

Ainsi, $f$ est définie par $f(x)=\dfrac{3}{x^2+1}-5$.

❷ **a)** Pour obtenir la fonction $f$ à l'aide de fonctions usuelles, on enchaine, dans cet ordre, les fonctions $x \mapsto x+1$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto 2-x$.

En effet, on a alors : $x \xrightarrow{x \mapsto x+1} x+1 \xrightarrow{x \mapsto \frac{1}{x}} \frac{1}{x+1} \xrightarrow{x \mapsto 2-x} 2-\frac{1}{x+1}$

**b)** $x \xrightarrow{x \mapsto x+2} x+2 \xrightarrow{x \mapsto \sqrt{x}} \sqrt{x+2} \xrightarrow{x \mapsto \frac{1}{x}} \frac{1}{\sqrt{x+2}} \xrightarrow{x \mapsto 3x} \frac{3}{\sqrt{x+2}}$

**c)** $x \xrightarrow{x \mapsto x^3+x+1} x^3+x+1 \xrightarrow{x \mapsto x^{10}} \left(x^3+x+1\right)^{10}$

**d)** $x \xrightarrow{x \mapsto x^2-x+3} x^2-x+3 \xrightarrow{x \mapsto \sqrt{x}} \sqrt{x^2-x+3} \xrightarrow{x \mapsto 1+x} 1+\sqrt{x^3-x+3}$

❸ **a)** En implémentant l'algorithme et en le faisant tourner, on observe que lorsque l'on entre 4, on obtient en sortie comme valeur approchée 2,56 et si l'on entre $-5$, on obtient environ 2,42 alors que lorsque l'on entre 1 ou 0, on obtient des erreurs de calculs, respectivement aux lignes 7 et 6.

On peut tester l'algorithme à la main pour obtenir les mêmes résultats.

**b)** Les fonctions $f_5$, $f_6$, $f_7$ et $f_8$ sont respectivement définies par :

$f_5(x)=x^2+2x-3$, $f_6(x)=\sqrt{x}$, $f_7(x)=\frac{1}{x}$ et $f_8(x)=3-2x$.

La fonction $f_5$ est définie sur $\mathbb{R}$ donc elle peut être appliquée à tout réel.

| x | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Signe de $x^2+2x-3$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

La fonction $f_6$ est définie sur $\left[0\,;+\infty\right[$, on ne peut donc l'appliquer qu'aux réels positifs.

Ainsi, il est nécessaire d'avoir $f_5(x)\geq 0$, c'est-à-dire $x^2+2x-3\geq 0$. Le trinôme $x^2+2x-3$ a pour discriminant pour discriminant $\Delta=16$ et pour racines $-3$ et 1. On détermine le signe de $x^2+2x-3$ pour en déduire que $f_5(x)\geq 0$ sur la réunion $\left]-\infty\,;\,-3\right]\cup\left[1\,;\,+\infty\right[$.

Pour pouvoir enchaîner les fonctions $f_5$ et $f_6$, il faut donc avoir choisi $x$ dans $\left]-\infty;\,-3\right[\cup\left]1\,;\,+\infty\right[$.

La fonction $f_7$ est définie sur $\mathbb{R}^*$ donc elle ne peut être appliquée qu'à tout réel non nul. Il est donc nécessaire d'avoir $f_6(f_5(x))\neq 0$ soit $\sqrt{f_5(x)}\neq 0$ ou encore $f_5(x)\neq 0$ ce qui conduit à exclure $-3$ et 1. Ainsi, pour pouvoir enchaîner les fonctions $f_5$, $f_6$ et $f_7$ il faut avoir choisi $x$ dans $\left]-\infty\,;\,-3\right[\cup\left]1\,;\,+\infty\right[$.

Enfin, la fonction $f_8$ étant définie sur $\mathbb{R}$, il n'y a pas de nouvelles contraintes sur $x$ et pour pouvoir définir la fonction $f$ par l'enchainement des fonctions $f_5$, $f_6$, $f_7$ et $f_8$ il faut donc choisir $x$ dans $\left]-\infty\,;\,-3\right[\cup\left]1\,;\,+\infty\right[$.

**c)**

```
VARIABLES
 X EST_DU_TYPE NOMBRE
DÉBUT_ALGORITHME
 LIRE X
 SI (X<-3 OU X>1) ALORS
   DEBUT_SI
   X PREND_LA_VALEUR X*X+2*X-3
   X PREND_LA_VALEUR sqrt (x)
   X PREND_LA_VALEUR 1/X
   X PREND_LA_VALEUR 3-2*X
   AFFICHER X
   FIN_SI
   SINON
     DEBUT_SINON
     AFFICHER "La fonction n'est pas définie pour le réel x choisi"
     FIN_SINON
FIN ALGORITHME
```

**d)** On a l'enchainement suivant :

$$x \overset{f_5}{\longmapsto} x^2+2x-3 \overset{f_6}{\longmapsto} \sqrt{x^2+2x-3} \overset{f_7}{\longmapsto} \frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}} \overset{f_8}{\longmapsto} 3-2\times\frac{1}{\sqrt{x^2+2x-3}}.$$

Ainsi, $f$ est définie sur $\left]-\infty\,;\,-3\right[\cup\left]1;\,+\infty\right[$ par $f(x)=3-\dfrac{2}{\sqrt{x^2+2x-3}}$.

# 3. Notation

Lorsque l'on enchaîne une fonction $u$ suivie d'une fonction $v$, on définit une fonction $f$ appelée composée de $u$ par $v$.

La fonction $f$ ainsi définie est notée $v\circ u$. On lit « $v$ rond $u$ ». Dire que $f=v\circ u$ signifie donc que pour tout $x$ de l'ensemble de définition de $f$, on a $f(x)=v\big(u(x)\big)$.

Soient $u$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $v$ une fonction définie sur un intervalle $J$ tel que $u(I)\subset J$. La situation peut être résumée par le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r] & J \arrow[r] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "f=v\circ u"'] & u(x) \arrow[r, mapsto] & f(x)=v(u(x))
\end{tikzcd}$$

# 2 Fonctions sinus et cosinus

## A Objectifs du chapitre

On présente dans ce chapitre, deux nouvelles fonctions usuelles : les fonctions sinus et cosinus.

## B Pour débuter

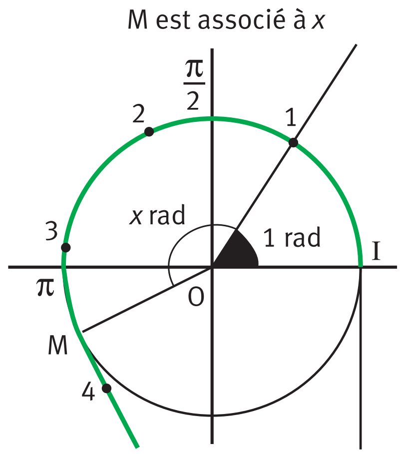
### 1. Rappels de trigonométrie

#### a) Repérage sur un cercle, angles orientés

**Propriété, définition 1**

Soit $\mathscr{C}$ un cercle orienté de centre O et de rayon 1 sur lequel on choisit un point I fixé.

- En enroulant la droite des réels sur le cercle $\mathscr{C}$, chaque réel $x$ est associé à un unique point M de $\mathscr{C}$.
- Le réel $x$ ainsi défini est appelé mesure en radian de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$.




**Propriétés 2**

Soit $\mathscr{C}$ un cercle orienté de centre O et de rayon 1 sur lequel on choisit un point I fixé.
Soit M un point de $\mathscr{C}$ et $x$ le réel qui lui est associé.

**a)** Tous les réels de la forme $x + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ permettent aussi de repérer le point M.

**b)** Parmi tous ces réels, celui qui appartient à $\left]-\pi\,;\pi\right]$ est appelée mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$.

**c)** Cette mesure d'angle est telle que $180° = \pi$ rad et telle que les mesures d'un angle en degrés et en radians soient proportionnelles.

**d)** Pour convertir la mesure d'un angle de degré en radian, on utilise donc la proportionnalité.
Ainsi, si $\alpha$ est la mesure d'un angle en degrés avec $0 \le \alpha \le 360$, et $x$ la mesure du même angle en radians dans l'intervalle $\left[0\,;\,2\pi\right]$, on a $x = \dfrac{\alpha\pi}{180}$.

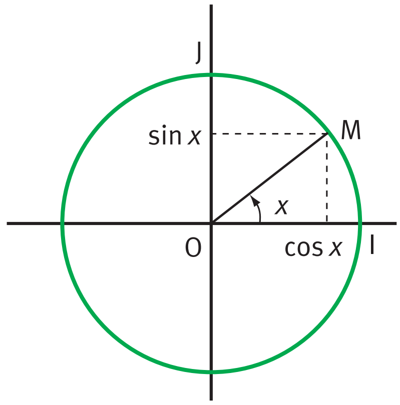
## b) Sinus et cosinus d'un réel

**Définition 2**

On considère un cercle $\mathscr{C}$ orienté de centre O et de rayon 1. Soit $x$ un réel et M le point qui lui est associé.

On appelle cosinus de $x$ et sinus de $x$ les coordonnées de M dans le repère $\left(O\,;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

On a ainsi : M ( cos $x$ ; sin $x$ ).




**À savoir**

*Valeurs remarquables*

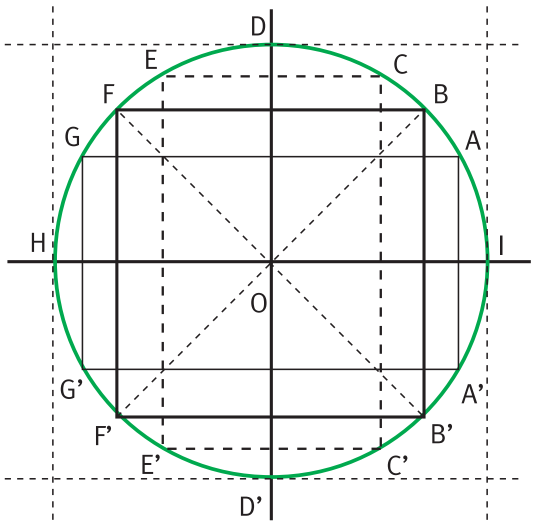
Il faut connaître :

- les valeurs des sinus et cosinus des angles remarquables ;

| **Réel $x$** | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| **cos $x$** | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| **sin $x$** | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ |

- les réels associés aux différents points placés sur le cercle ci-contre.

Les propriétés suivantes découlent immédiatement de ce qui précède.




**Propriétés 3**

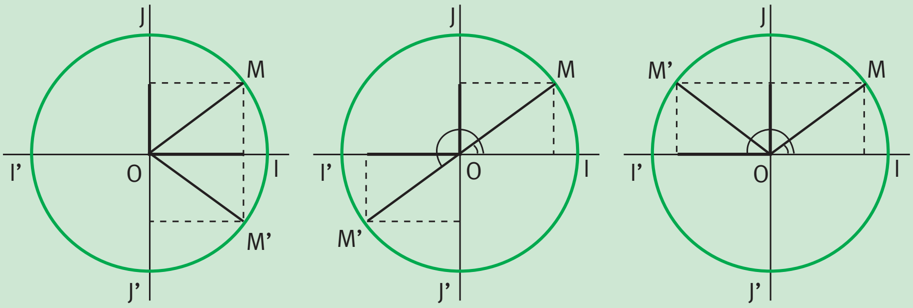
- Pour tout réel $x$, on a $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- Pour tout réel $x$, on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- Pour tout réel $x$ et tout entier relatif $k$, on a $\cos\left(x + k \times 2\pi\right) = \cos x$ et $\sin\left(x + k \times 2\pi\right) = \sin x$.

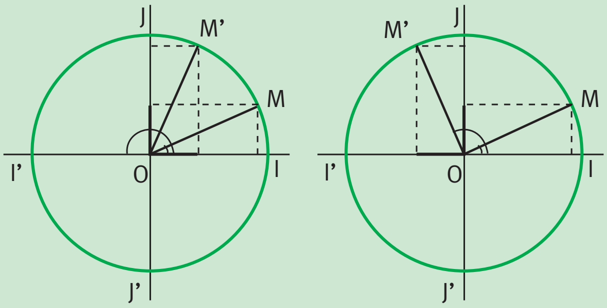
**Propriétés 4** *Cosinus et sinus des réels associés à un réel x*

On considère un cercle trigonométrique $\mathscr{C}$, (c'est-à-dire un cercle de centre O de rayon 1) $x$ un réel quelconque et M le point de $\mathscr{C}$ qui lui est associé.

Ainsi, M est tel qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}\right)$ soit $x$ radians (à un multiple de $2\pi$ près).

Sur les figures ci-dessous, M' est associé successivement à $-x$, $\pi+x$, $\pi-x$, $\frac{\pi}{2}-x$, $\frac{\pi}{2}+x$.




Par des arguments de symétrie, on peut retrouver successivement les propriétés suivantes.

Pour tout réel $x$, on a $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$.

Pour tout réel $x$, on a $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(x + \pi) = -\sin x$.

Pour tout réel $x$, on a $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$.

Pour tout réel $x$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$.

Pour tout réel $x$, on a $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$.

**Propriétés 5** *Formules d'addition*

Pour tous réels $a$ et $b$, on a :

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ ;

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ ;

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ ;

$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$.

On en déduit le cas particulier suivant.

**Propriétés 6** *Formules de duplication*

Pour tout réel $a$, on a $\sin 2a = 2\sin a \cos a$.

Pour tout réel $a$, on a $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ ou bien $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ ou encore $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$.

On peut remarquer que ces deux dernières expressions de la formule de duplication du cosinus permettent aussi d'obtenir que, pour tout réel $a$, on a

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1+\cos 2a) \text{ et } \sin^2 a = \frac{1}{2}(1-\cos 2a).$$

### c) Résolution d'équations

Pour résoudre une équation trigonométrique, l'idée est, lorsque c'est possible et en utilisant éventuellement les propriétés ci-dessus, de se ramener à une équation :

- du type $\cos A(x) = \cos B(x)$ pour en déduire par équivalence que

$$A(x) = B(x) + k \times 2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ou } A(x) = -B(x) + k \times 2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \ ;$$

- du type $\sin A(x) = \sin B(x)$ pour en déduire par équivalence que

$$A(x) = B(x) + k \times 2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ou } A(x) = \pi - B(x) + k \times 2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

Pour une résolution sur un intervalle ou une réunion d'intervalle, on commence par résoudre l'équation sur $\mathbb{R}$ puis on sélectionne les solutions appartenant à l'ensemble considéré.

## 2. Activités

**■ Activité 1**

Nous allons par cette activité découvrir les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus à partir de la définition du sinus et du cosinus d'un réel.

Pour cela, nous travaillerons à l'aide du logiciel GeoGebra.

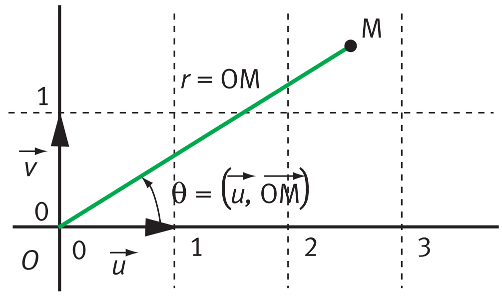
**❶ Configuration du logiciel GeoGebra**

a) Choisir le radian comme unité. Pour cela, choisir *Configuration* dans le menu *Options* puis dans l'onglet *Avancé*, cocher le *Radian* comme *Unité d'angle*.

b) Dans le menu *Affichage*, cocher *Algèbre*, *Graphique* et *Graphique2*. Il est alors possible de regrouper ces trois écrans dans une même fenêtre.

**❷ Construction du point M** du cercle trigonométrique associé à un réel $X$ dans la fenêtre nommée Graphique.

On se place dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{u},\vec{v}\right)$. On admet que tout point M du plan peut être repéré par la longueur $r = \mathrm{OM}$ et une mesure de l'angle $\theta = \left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right)$. Dans ce cas, on dit que le point M a pour coordonnées polaires le couple $\left(r\,;\theta\right)$.




Soit $X$ un réel et M le point du cercle trigonométrique qui lui est associé. Par définition, M est donc le point du plan tel que OM = 1 et $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) = X$. Ainsi, le point M a pour coordonnées polaires le couple $(1\,;X)$.

**a)** Placer le point O, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ainsi que le cercle trigonométrique.

**b)** Créer un curseur $X$ prenant des valeurs allant de $-4\pi$ à $4\pi$ (sous GeoGebra, entrer pi pour $\pi$) puis placer le point M associé au réel $X$ autrement dit, construire le point M de coordonnées polaires $(1\,;X)$.

Sous GeoGebra, on utilise le point-virgule comme pour séparer les coordonnées lorsque l'on travaille avec des coordonnées polaires alors que l'on utilise une virgule pour séparer les coordonnées lorsque l'on travaille en coordonnées cartésiennes.

**c)** Par définition, l'abscisse du point M et l'ordonnée du point M sont les cosinus et sinus du réel $X$. Afin de visualiser ces réels, créer les points $\mathrm{M}_C$ et $\mathrm{M}_S$, projetés orthogonaux du point M respectivement sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

**❸ Construction des représentations graphiques** des fonctions sinus et cosinus dans la fenêtre Graphique 2.

On pourra configurer le Graphique 2 en choisissant dans le menu Options/Configuration/Graphique une distance égal à $\frac{\pi}{2}$ dans l'onglet axeX de façon à faire plus facilement le lien entre les valeurs de $X$ obtenues sur le cercle trigonométrique et sur les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus.

**a)** Placer sur le graphique 2, le points S de coordonnées $(X\,;\sin X)$. Pour cela, il suffit d'entrer dans la barre de saisie de GeoGebra S=(X,y(M)). Procéder de façon analogue pour placer le point C de coordonnées $(X\,;\cos X)$.

**b)** Activer la trace des points S et C puis faire varier le curseur pour obtenir une allure des représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus.

**4** **Conjectures** quant aux variations des fonctions sinus et cosinus.

À partir des courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus, conjecturer les variations de ces deux fonctions sur l'intervalle $\left[0\ ;\ 2\pi\right]$.

# C Cours

## 1. Définitions et propriétés immédiates

**Définition 3**

On appelle fonction cosinus la fonction qui à tout réel $x$ associe le réel $\cos x$.

On appelle fonction sinus la fonction qui à tout réel $x$ associe le réel $\sin x$.

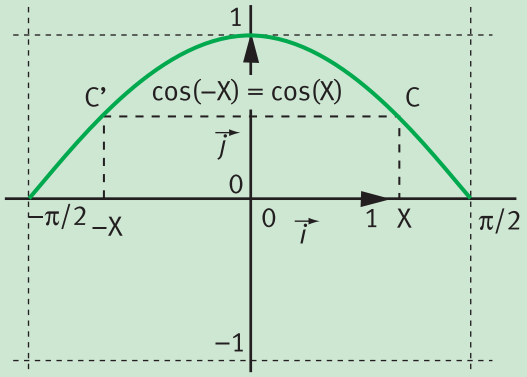
Les sinus et cosinus d'un réel étant définis à partir du cercle trigonométrique, les fonctions sinus et cosinus sont appelées fonctions circulaires.

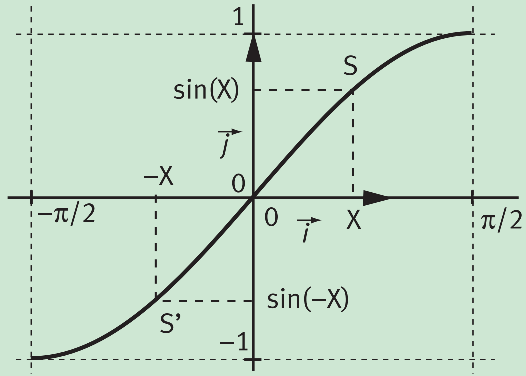
**Propriété 7**
*Ensemble de définition*

Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$.

**Propriétés 8** *Parité*

On sait que pour tout réel $x$, on a $\cos(-x) = \cos x$. On dit que la fonction cosinus est paire.
Graphiquement, la fonction cosinus admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
On sait que pour tout réel $x$, on a $\sin(-x) = -\sin x$. On dit que la fonction sinus est impaire.
Graphiquement, la fonction sinus admet l'origine du repère comme centre de symétrie.



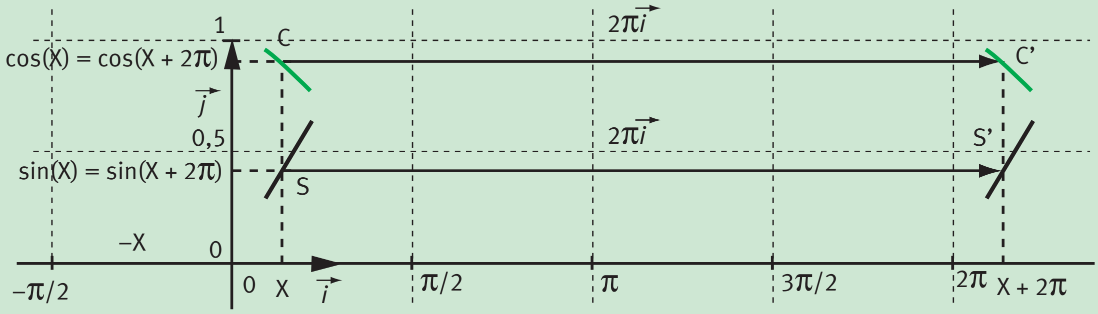



**Propriétés 9** *Périodicité*

On sait que pour tout réel $x$, on a $\cos\left(x+2\pi\right)=\cos x$ et $\sin\left(x+2\pi\right)=\sin x$.

En terme de fonctions, on dit que les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période $2\pi$.

Graphiquement, dans le plan muni d'un repère $\left(O\,;\vec{i},\ \vec{j}\right)$, les courbes représentant ces fonctions sont invariantes par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.




## 2. Dérivabilité et dérivées

**Propriétés préliminaires**

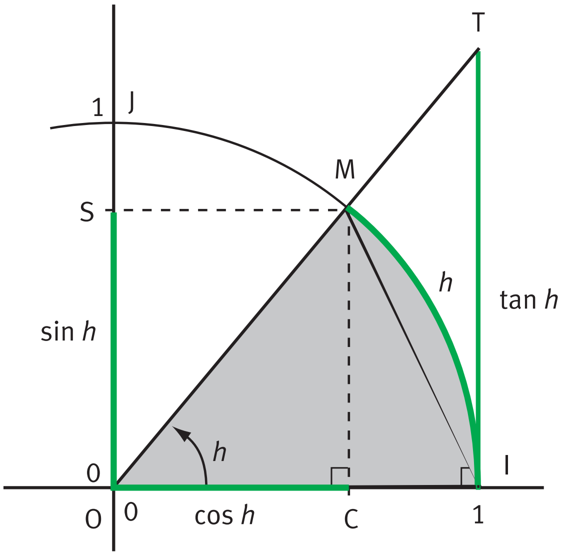
- La fonction sinus est dérivable en 0 et admet pour nombre dérivé 1 en 0.
  Autrement dit $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}=1.$
- La fonction cosinus est dérivable en 0 et admet pour nombre dérivé 0 en 0. Autrement dit $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos h-1}{h}=0.$

### *Démonstrations*

On notera que ces démonstrations ne sont pas exigibles.

Par ailleurs, on utilisera des résultats qui ne seront abordés que plus loin dans la séquence (limite et continuité). Il pourra donc être intéressant de revenir sur ces preuves une fois que ces notions auront été travaillées.

- Par définition, dire que la fonction sinus est dérivable en 0 signifie que le taux d'accroissement $\dfrac{\sin h-\sin 0}{h}$ admet une limite finie lorsque $h$ tend vers 0 autrement dit que $\dfrac{\sin h}{h}$ admet une limite lorsque $h$ tend vers 0.




Même si la notion de limite de fonctions n'est vu que dans le chapitre suivant, on s'appuie sur les démarches observées lors du calcul de limites de suites pour raisonner.

Dans ce cas, en admettant la continuité de la fonction sinus en 0, on a $\lim\limits_{h \to 0} \sin h = 0$ or $\lim\limits_{h \to 0} h = 0$ donc nous sommes dans un cas d'indétermination.

L'idée est alors d'encadrer le nombre $\dfrac{\sin h}{h}$ afin d'utiliser le théorème des gendarmes déjà rencontré dans la séquence 1 sur les suites et qui sera prolongé dans la suite au cas des limites de fonctions.

Pour établir cet encadrement, nous allons travailler géométriquement à l'aide d'un raisonnement sur les aires.

Soit $h$ un réel tel que $0 < h < \dfrac{\pi}{2}$.

Sur la figure ci-dessus, on place M le point du cercle trigonométrique associé à $h$, on place les points C et S projetés orthogonaux de M sur les axes de coordonnées et on construit T, intersection de la droite (OM) et de la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par I.

Comme $0 < h < \dfrac{\pi}{2}$, on a OS = sin $h$ et IT = tan $h$ (si ce dernier résultat n'est pas connu, on peut aisément le retrouver comme application du théorème de Thalès dans le triangle OIT en remarquant que OC = cos $h$).

On remarque que le triangle OIM est inclus dans le secteur angulaire $\mathscr{S}$ de centre O et d'extrémités I et M lui même inclus dans le triangle OIT. On peut donc en déduire que $\text{aire(OIM)} \leq \text{aire}(\mathscr{S}) \leq \text{aire(OIT)}$.

L'aire des triangles OIM et OIT valent respectivement

$$\text{aire(OIM)} = \frac{\text{OI} \times \text{CM}}{2} = \frac{\sin h}{2} \quad \text{et} \quad \text{aire(OIT)} = \frac{\text{OI} \times \text{IT}}{2} = \frac{\tan h}{2}.$$

On remarque que l'aire d'un secteur angulaire est proportionnelle à la longueur de l'arc le délimitant or l'aire d'un disque de rayon 1 étant de $\pi$ pour une longueur d'arc égale à $2\pi$, il apparaît que le coefficient de proportionnalité est de $\dfrac{1}{2}$. Ainsi, l'aire du secteur angulaire $\mathscr{S}$ de longueur d'arc $\overset{\frown}{\text{IM}} = h$ vaut $\text{aire}(\mathscr{S}) = \dfrac{h}{2}$.

La double inégalité sur les aires peut donc s'écrire $\frac{\sin h}{2} \leq \frac{h}{2} \leq \frac{\tan h}{2}$ ou encore

$$\sin h \leq h \leq \tan h.$$

Comme $0 < h < \frac{\pi}{2}$, on a $\sin h > 0$ d'où $1 \leq \frac{h}{\sin h} \leq \frac{1}{\cos h}$. Lorsque $h$ tend vers 0, $\cos h$ et $\frac{1}{\cos h}$ tendent vers 1 donc, par le théorème des gendarmes $\frac{h}{\sin h}$ tend vers 1 d'où, par inversion $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$.

On remarquera que le raisonnement a été fait pour $h > 0$. Toutefois, on note que pour $h$ tel que $-\frac{\pi}{2} < h < 0$, on a $0 < -h < \frac{\pi}{2}$ d'où $1 \leq \frac{-h}{\sin(-h)} \leq \frac{1}{\cos(-h)}$ ce qui donne $1 \leq \frac{h}{\sin h} \leq \frac{1}{\cos h}$ de sorte que l'inégalité qui a permis de déterminer la limite de $\frac{\sin h}{h}$ soit encore vraie lorsque $-\frac{\pi}{2} < h < 0$.

- Par définition, dire que la fonction cosinus est dérivable en 0 signifie que le taux d'accroissement $\frac{\cos h - \cos 0}{h}$ admet une limite finie lorsque $h$ tend vers 0 autrement dit que $\frac{\cos h - 1}{h}$ admet une limite lorsque $h$ tend vers 0.

Pour $h \neq 0$, $h$ petit

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{(\cos h - 1)(\cos h + 1)}{h(\cos h + 1)} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\sin h \times \frac{\sin h}{h} \times \frac{1}{\cos h + 1}.$$

En admettant la continuité de la fonction cosinus en 0, on a $\lim\limits_{h \to 0} \cos h = 1$ d'où $\lim\limits_{h \to 0} \cos h + 1 = 2$ puis par inversion $\lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{\cos h + 1} = \frac{1}{2}$. On a vu par ailleurs que $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ et que $\lim\limits_{h \to 0} \sin h = 0$ donc par produit, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = 0$.

**Propriétés 10**

- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\sin)'(x) = \cos x.$$

- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(\cos)'(x) = -\sin x.$$

## Démonstrations

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $h \neq 0$, on forme le taux d'accroissement $\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$.

On a

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h}$$
$$= \frac{\sin x(\cos h - 1) + \sin h \cos x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}$$

or $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \cos x$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $h \neq 0$, on forme le taux d'accroissement $\dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$.

On a

$$\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = \frac{\cos x \cos h - \sin h \sin x - \cos x}{h}$$
$$= \frac{\cos x(\cos h - 1) - \sin h \sin x}{h} = \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h}$$

or $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} = 0$ et $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(x+h)-\cos x}{h} = -\sin x$.

▸ Exemple 1 La fonction tangente est la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

**Déterminer la dérivée de la fonction tangente.**

▸ **Solution** Pour tout $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. La fonction tangente est donc le quotient de $x \mapsto \sin x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ par la fonction $x \mapsto \cos x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$ donc la fonction tangente est dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Formule utilisée : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu' - v'u}{v^2}$.

Pour tout $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$,

$$(\tan)'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - (-\sin x) \times \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}.$$

Nous pouvons adopter deux points de vue pour simplifier l'expression de la dérivée de la fonction tangente.

Pour tout $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, $(\tan)'(x) = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

ou bien, pour tout $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$,

$$(\tan)'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \tan^2 x.$$

*Bien que le résultat ne soit pas exigible, on pourra retenir que pour tout* $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ *où* $k \in \mathbb{Z}$, $(\tan)'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ *ou encore* $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x$.

## 3. Variations

**Propriétés 11**

- La fonction sinus est strictement croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right]$, strictement décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\dfrac{3\pi}{2}\,;\,2\pi\right]$.

| $x$ | $0$ | | $\dfrac{\pi}{2}$ | | $\dfrac{3\pi}{2}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de la fonction sinus | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ |

La périodicité permet d'obtenir les variations de la fonction sinus sur $\mathbb{R}$.

- La fonction cosinus est strictement décroissante sur $[0\,;\,\pi]$ et strictement croissante sur $[\pi\,;\,2\pi]$.

| $x$ | $0$ | | $\pi$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de la fonction cosinus | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ |

La périodicité permet d'obtenir les variations de la fonction cosinus sur $\mathbb{R}$.

### Démonstrations

- Pour $x \in \mathbb{R}$, $(\sin)'(x) = \cos x$ or sur $\left[0\ ;\ 2\pi\right]$, on déduit des propriétés du cosinus, à l'aide du cercle trigonométrique par exemple, que

$$\cos x > 0 \Leftrightarrow x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{3\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right] \text{ et } \cos x < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right[$$

c'est-à-dire

$$(\sin)'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{3\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right] \text{ et } (\sin)'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right[.$$

Par suite, la fonction sinus est strictement croissante sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$, strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{3\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$.

- Pour $x \in \mathbb{R}$, $(\cos)'(x) = -\sin x$ or sur $\left[0\ ;\ 2\pi\right]$, on déduit des propriétés du sinus, à l'aide du cercle trigonométrique par exemple, que

$$\sin x > 0 \Leftrightarrow x \in \left]0\ ;\ \pi\right[ \text{ et } \sin x < 0 \Leftrightarrow x \in \left]\pi\ ;\ 2\pi\right[$$

c'est-à-dire $(\cos)'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]0\ ;\ \pi\right[$ et $(\cos)'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\pi\ ;\ 2\pi\right[$.

Par suite, La fonction cosinus est strictement décroissante sur $\left[0\ ;\ \pi\right]$ et strictement croissante sur $\left[\pi\ ;\ 2\pi\right]$.

## 4. Représentations graphiques

### *Tangentes en des points particuliers*

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\sin)'(x) = \cos x$ ainsi :

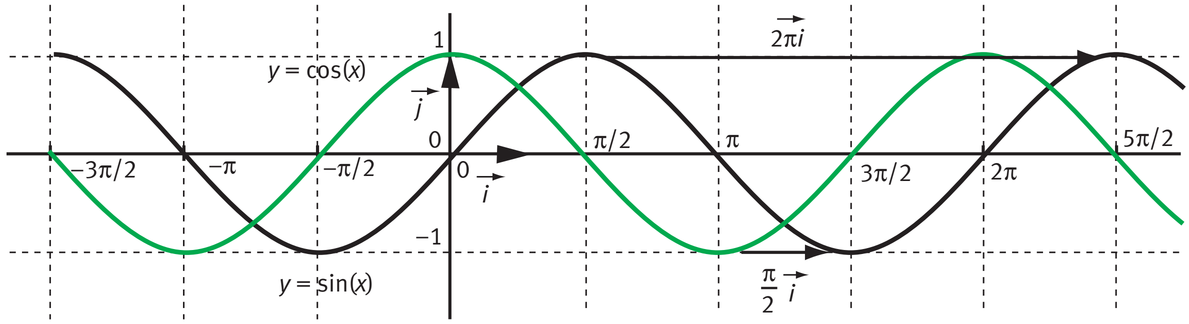
- pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $(\sin)'(k \times 2\pi) = \cos(k \times 2\pi) = 1$ donc la représentation graphique de la fonction sinus admet des tangentes de coefficient directeur 1 en tous les points d'abscisse $k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. En particulier, la tangente à l'origine du repère a pour équation $y = x$ ;

- pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $(\sin)'\left(\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi\right) = 0$ donc la représentation graphique de la fonction sinus admet des tangentes horizontales en tous les points d'abscisse $\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

On rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\cos)'(x) = -\sin x$ ainsi :

- pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $(\cos)'(k \times 2\pi) = -\sin(k \times 2\pi) = 0$ donc la représentation graphique de la fonction cosinus admet des tangentes horizontales en tous les points d'abscisse $k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ ;
- pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $(\cos)'\left(\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi\right) = -1$ donc la représentation graphique de la fonction sinus admet des tangentes de coefficient directeur $-1$ en tous les points d'abscisses $\frac{\pi}{2} + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

### *Courbes*




On remarquera les résultats précédemment obtenus lors de l'étude de la parité et de la périodicité de la fonction sinus et cosinus :

- la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère et elle est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$ ;
- la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et elle est invariante par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.

On remarquera de plus que la courbe représentative de la fonction sinus est l'image de celle de la fonction cosinus par translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$, ce résultat découlant de la propriété établie précédemment : $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$ pour tout réel $x$.

# D Exercices d'apprentissage

## Exercice 1 *Équations et inéquations*

❶ Résoudre dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ puis dans l'intervalle $[0\,;2\pi[$

a) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ; b) $\cos 2x = \dfrac{1}{2}$.

❷ Résoudre dans $\mathbb{R}$

a) $\sin x = \sin(2x + \dfrac{\pi}{2})$ ; b) $\sin 2x = \cos 3x$ ; c) $3\sin x = 2\cos^2 x$.

❸ Résoudre les inéquations suivantes

a) $\cos x \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ dans $]-\pi\,;\pi]$ ; b) $\sin x \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ dans $]-\pi\,;\pi]$ ;

c) $\cos(2x + \dfrac{\pi}{3}) > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ dans $[0\,;\pi]$ ; d) $4\cos^2 x - 1 \geq 0$ dans $[0\,;2\pi[$ ;

e) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 < 0$ dans $]-\pi\,;\pi]$.

## Exercice 2 *Étude de fonctions*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos^2 x + \sin(2x)$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\,\vec{j})$ d'unité graphique 4 cm.

❶ a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x+\pi) = f(x)$. Que peut-on en déduire concernant $\mathscr{C}_f$ ?

b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet la droite d'équation $x = \dfrac{\pi}{8}$ comme axe de symétrie.

❷ a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2\cos x(\cos x + \sin x)$.

b) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\sqrt{2}\sin(\dfrac{\pi}{4} - 2x)$.

c) Étudier les variations de $f$ sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{8}\,;\dfrac{5\pi}{8}\right]$.

❸ a) Tracer la courbe $\mathscr{C}_I$ représentant la restriction de $f$ à l'intervalle I.

b) Comment obtient-on la courbe $\mathscr{C}_f$ à partir de la courbe $\mathscr{C}_I$ ?

## Exercice 3 *Encadrement et étude de fonction*

L'objectif est de démontrer une inégalité :

$$\text{pour tout } [0\,;\,\pi],\ \ x-\frac{x^3}{6}\leq \sin x \leq x.$$

❶ En étudiant la fonction $u$ définie sur $[0\,;\,\pi]$ par $u(x)=\sin x - x$, démontrer que pour tout $[0\,;\,\pi]$, $\sin x \leq x$.

❷ Soit $f$ la fonction définie sur $[0\,;\,\pi]$ par $f(x)=-x+\dfrac{x^3}{6}+\sin x$.

**a)** Démontrer que la fonction $f'$ est croissante sur $[0\,;\,\pi]$.

**b)** En déduire les variations puis le signe de $f$ sur $[0\,;\,\pi]$.

❸ Conclure.

# 3 Limites de fonctions

## A Objectifs du chapitre

On présente dans ce chapitre, les notions de limites de fonction. La notion de limites a été abordée dans la séquence 1 sur les suites numériques. Il s'agira donc ici d'étendre le travail qui a été fait sur les suites. Sauf mention contraire, les propriétés et les théorèmes seront admis puisque la démarche est la même que ce qui a été abordé dans la séquence 1.

## B Pour débuter

■ **Activité 2**

Soit $f$ la fonction définie sur $\left]-\infty\,;2\right[\cup\left]2\,;+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-2}$.

On s'interroge sur le comportement de $f$ aux bornes de son ensemble de définition autrement dit, on cherche à déterminer les limites de $f$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$, $+\infty$ et 2.

Dans cette activité, on s'intéressera aux limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

❶ a) Représenter graphiquement la fonction $f$ puis conjecturer le comportement de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) S'appuyer sur un tableau de valeurs à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice pour confirmer ou infirmer ces conjectures.

❷ En admettant que la démarche en la même que celle utilisée lors des calculs de limites de suites, déterminer la limite de $f$ en $+\infty$. Adapter le raisonnement pour déterminer la limite de $f$ en $-\infty$.

■ **Activité 3**

*Une activité autour des limites en* 0 *de fonctions de référence.*

a) Compléter, lorsque c'est possible, le tableau de valeurs page suivante.

| $x$ | $-10^{-6}$ | $-10^{-3}$ | $10^{-3}$ | $10^{-6}$ |
|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ | | | | |
| $\dfrac{1}{x}$ | | | | |
| $\dfrac{1}{x^2}$ | | | | |
| $\dfrac{1}{x^3}$ | | | | |

**b)** Quelle semble être la limite en 0 des fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ ?

**c)** Résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$ les inéquations $\dfrac{1}{\sqrt{x}} > 10^6$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}} > 10^{12}$.

**d)** Résoudre sur $]0\,;\,+\infty[$ les inéquations $\dfrac{1}{x} > 10^6$ et $\dfrac{1}{x} > 10^{12}$ puis résoudre sur $]-\infty\,;0[$ les inéquations $\dfrac{1}{x} < -10^6$ et $\dfrac{1}{x} < -10^{12}$. Interpréter les résultats obtenus.

**e)** Résoudre sur $\mathbb{R}^*$ les inéquations $\dfrac{1}{x^2} > 10^6$ et $\dfrac{1}{x^2} > 10^{12}$.

## ■ Activité 4

On reprend la fonction $f$ définie sur $]-\infty\,;2[\,\cup\,]2\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$.

Dans **l'activité 2**, on s'est intéressé au comportement de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

On étudie désormais le comportement de $f$ au voisinage de 2.

**1** En vous appuyant sur une représentation graphique de $f$ et d'un tableau de valeurs de $f(x)$, conjecturer le comportement de $f$ au voisinage de 2.

**2** **a)** Soit $A$ un réel aussi grand que l'on veut. Démontrer qu'il existe un réel $x_0$ tel que pour $2 < x < x_0$ on ait $f(x) > A$. Que peut-on en déduire quand à la limite de $f$ au voisinage de 2 ?

**b)** Comment adapter la démarche précédente pour déterminer la limite de $f$ lorsque x tend vers 2 par valeurs inférieures à 2 ?

## ■ Activité 5

Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x-1}$.

La fonction $f$ n'est pas définie en 1 car le dénominateur s'annule en 1.

On s'interroge donc sur le comportement de $f$ au voisinage de 1.

**a)** À l'aide d'une représentation graphique ou d'un tableau de valeurs de la fonction $f$ conjecturer la limite de $f(x)$ lorsque $x$ tend vers 1.

**b)** En vous aidant de la représentation graphique de $f$, écrire $f(x)$ sou une autre forme valable pour tout $x \in \left]-\infty\,;1\right[ \cup \left]1\,;+\infty\right[$. Démontrer alors la conjecture établie précédemment.

# C Cours

## 1. Limite en $+\infty$ ou en $-\infty$

**Définition 4** *Limites en $+\infty$*

Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $\left]\alpha\,;+\infty\right[$.

- On dit que $f(x)$ tend vers $\ell$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ell$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle du type $\left]A\,;+\infty\right[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle du type $\left]-\infty\,;A\right[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

*Remarque* Cette définition est une extension directe de la définition donnée pour les limites de suites.

**Définition 5** *Limites en $-\infty$*

Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $-\infty$, c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $\left]-\infty\,;\alpha\right[$.

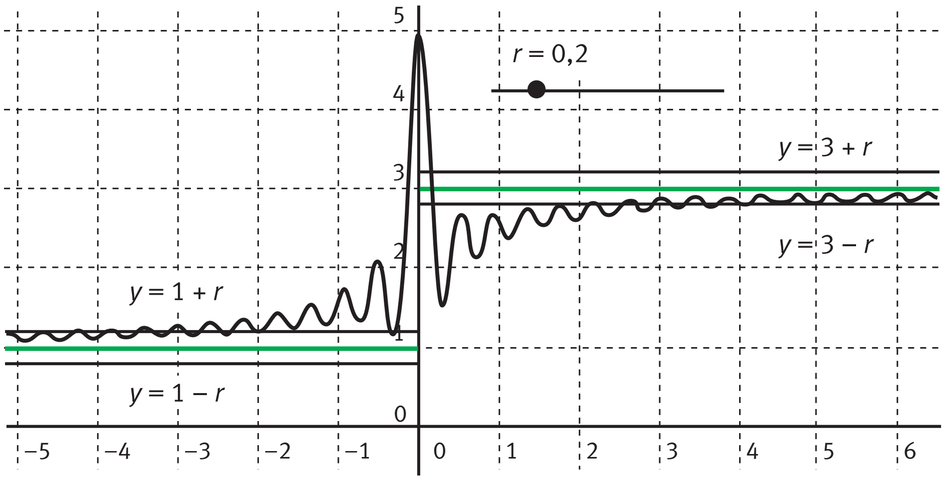
- On dit que $f(x)$ tend vers $\ell$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ négatif, suffisamment grand en valeur absolue. On note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\ell$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle du type $\left]A\,;+\infty\right[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ négatif, suffisamment grand en valeur absolue. On note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle du type $\left]-\infty\,;A\right[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ négatif, suffisamment grand en valeur absolue. On note $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

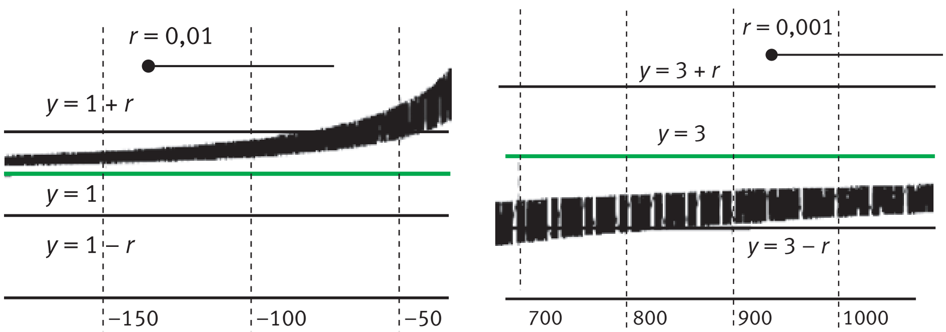
## Illustration graphique

Il apparaît graphiquement sur l'illustration ci-dessous que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.

En effet, par définition, dire que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ ) signifie que tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment grand (respectivement pour $x$ négatif, suffisamment grand en valeur absolue).

En pratique, tout intervalle contenant $\ell$ peut s'écrire sous la forme $]\ell - r\,;\ell + r[$ où $r$ est un réel strictement positif quelconque, que l'on peut choisir aussi petit que l'on peut.




Il apparaît graphiquement que, quelle que soit la valeur de $r$ choisie, la courbe représentant $f$ finit par se retrouver dans une bande limitée par les droites d'équations $y = \ell - r$ et $y = \ell + r$ pour ne plus en ressortir.

**Propriété 12** *Limites de fonctions usuelles en* $+\infty$

On a :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}x=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}x^2=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty$$

et plus généralement $\lim\limits_{x\to+\infty}x^k=+\infty$ où $k\in\mathbb{N}^*$.

Par inversion, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}=0$$

et plus généralement $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^k}=0$ où $k\in\mathbb{N}^*$.

***Remarque*** Ces propriétés sont analogues à celles établies pour les limites de suites.

**Propriété 13** *Limites de fonctions usuelles en* $-\infty$

On a :

$\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$ et plus généralement $\lim\limits_{x\to-\infty}x^k=-\infty$ lorsque $k$ est un entier naturel impair et $\lim\limits_{x\to-\infty}x^k=+\infty$

lorsque $k$ est un entier naturel pair non nul.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3}=0$ et plus généralement $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^k}=0$ où $k\in\mathbb{N}^*$.

## 3. Limite en un réel, limite à gauche, limite à droite

**Définitions 6**

Soit $f$ une fonction définie sur un voisinage de $a$ sauf éventuellement en $a$.

- On dit que $f(x)$ tend vers $\ell$ lorsque $x$ tend vers $a$ lorsque tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment proche de $a$. On note $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell$.

## Définitions 6

- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $a$ lorsque tout intervalle du type $\left]A\,;+\infty\right[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment proche de $a$. On note $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $a$ lorsque tout intervalle du type $\left]-\infty\,;A\right[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment proche de $a$. On note $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.
- Comme on l'a constaté dans l'activité 1, il est parfois nécessaire de considérer la restriction de $f$ à gauche de $a$ ou à droite de $a$. On reprend alors les définitions ci-dessus en précisant que l'on travaille pour $x$ suffisamment proche de $a$ avec $x < a$ ou $x > a$.

Cela permet de définir respectivement la notion de limite à gauche et de limite à droite d'un réel $a$.

On note alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ les limites correspondantes.

***Remarque*** Si $f$ admet une limite à gauche de $a$ égale à $\ell$ et une limite à droite de $a$ égale à $\ell'$ et si $\ell=\ell'$ alors $f$ admet $\ell$ pour limite en $a$.

**Propriété 14** *Limites de fonctions usuelles en un réel*

- On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$ ou, plus simplement car $x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ n'est pas définie à gauche de 0, on notera $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}}=+\infty$.
- Les fonctions $x\mapsto\dfrac{1}{x}$, $x\mapsto\dfrac{1}{x^3}$, $x\mapsto\dfrac{1}{x^5}$ et plus généralement $x\mapsto\dfrac{1}{x^k}$ où $k$ est un entier naturel impair, n'ont pas de limite en 0. En revanche, elles admettent des limites infinies distinctes à gauche et à droite de 0 et on a dans ce cas $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^k}=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^k}=+\infty$.
- Les fonctions $x\mapsto\dfrac{1}{x^2}$, $x\mapsto\dfrac{1}{x^4}$ et plus généralement $x\mapsto\dfrac{1}{x^k}$ où $k$ est un entier naturel pair admettent la même limite infinie à gauche et à droite de 0 et on a dans ce cas $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{1}{x^k}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x^k}=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^k}=+\infty$.

## 3. Interprétation graphique, Asymptotes

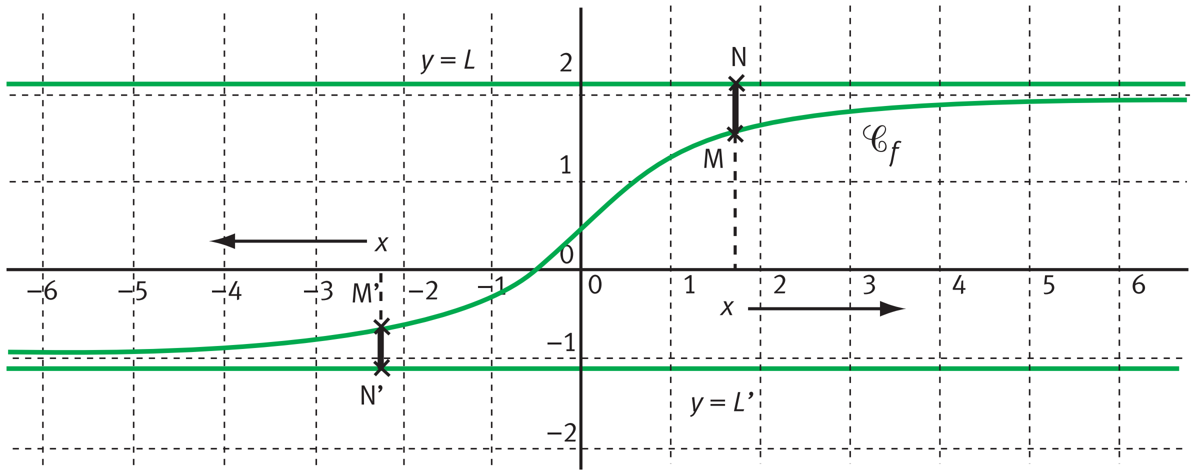
**Définitions 7**

Soit $f$ une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ (ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$).

La droite d'équation $y = L$ est dite droite asymptote à la courbe représentative de $f$ au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$).

### Illustration graphique

Graphiquement, on observe qu'une droite est asymptote à une courbe lorsque la courbe se rapproche autant qu'on le veut de la droite.




Sur le dessin ci-dessus, $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction $f$ telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L'$.

Les droites d'équations $y = L$ et $y = L'$ sont donc respectivement asymptotes à la courbe au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Les points M et N ont pour abscisse $x$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ se traduit par le fait que la longueur MN tende vers 0 quand $x$ tend vers $+\infty$. Au voisinage de $+\infty$, la courbe $\mathscr{C}_f$ se rapproche donc de la droite d'équation $y = L$.

De façon analogue, on observe que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L'$ se traduit par le fait que la longueur M'N' tende vers 0 quand $x$ tend vers $-\infty$. Au voisinage de $-\infty$, la courbe $\mathscr{C}_f$ se rapproche donc de la droite d'équation $y = L'$.

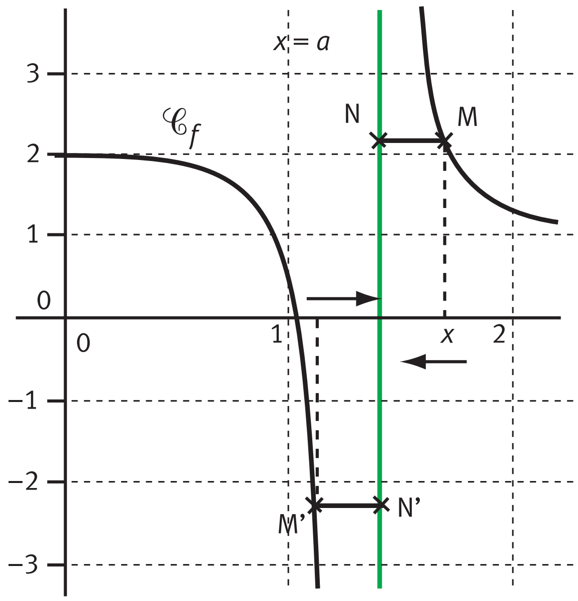
**Définition 8**

Soit $f$ une fonction telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ) où $a$ est un réel.

La droite d'équation $x = a$ est dite droite asymptote à la courbe représentative de $f$.

Cette définition est encore vraie si on considère des limites à gauche ou à droite de $a$.

### Illustration graphique




Sur le dessin ci-contre, $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction $f$ telle que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$.

La droite d'équation $x = a$ est donc asymptote à $\mathscr{C}_f$.

Le point M a pour abscisse $x$ et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$ se traduit par le fait que la longueur MN tende vers 0 quand $x$ tend vers $a$ par valeurs supérieures. La courbe $\mathscr{C}_f$ se rapproche donc de la droite d'équation $x = a$ à droite de $a$.

De façon analogue, on observe que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty$ se traduit par le fait que la longueur M'N' tende vers 0 quand $x$ tend vers $a$ par valeurs inférieures. La courbe $\mathscr{C}_f$ se rapproche donc de la droite d'équation $x = a$ à gauche de $a$.

## 4. Opérations sur les limites

Tous les résultats qui suivent sont valables pour des limites à gauche ou à droite. Ils sont admis.

Dans ce qui suit, $f$ et $g$ sont deux fonctions définies au voisinage de $\alpha$ où $\alpha$ désigne indifféremment un réel $a$ ou $+\infty$ ou $-\infty$.

La présence d'éventuelles cases coloriées dans les tableaux signifie qu'on est en présence de « formes indéterminées », c'est-à-dire que la propriété ne permet pas de conclure puisque le résultat dépend de la situation dans laquelle on se trouve. Dans ce cas, il est nécessaire de procéder autrement pour lever l'indétermination.

**Propriété 15** *Somme*

- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\ell$ et si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\ell'$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x)=\ell+\ell'$.
- Dans le cas où l'une au moins des fonctions a une limite infinie en $\alpha$, les résultats sont donnés par le tableau suivant :

*La limite de la somme $f(x)+g(x)$*

| $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|
| $+\infty$ | $+\infty$ | |
| $-\infty$ | | $-\infty$ |
| $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

**Propriété 16** *Produit*

- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\ell$ et si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\ell'$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)=\ell\times\ell'$.
- Dans le cas où l'une au moins des fonctions a une limite infinie en $\alpha$, les résultats sont donnés par le tableau suivant :

*La limite du produit $f(x)\times g(x)$*

| $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|
| $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| 0 | | |
| $\ell$ $(\ell>0)$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell$ $(\ell<0)$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

**Propriété 17** *Inversion*

| $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\ell$ $(\ell\neq 0)$ | $0_+$ | $0_-$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{f(x)}$ | 0 | 0 | $\dfrac{1}{\ell}$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

**Remarque** Pour préciser que $f(x)$ tend vers 0 en étant strictement positive pour lorsque $x$ tend vers $\alpha$ on note $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0_+$ ce qui signifie que $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=0$ avec $f(x)>0$ au voisinage de $\alpha$.

▶ **Exemple** Calculons la limite de $\dfrac{1}{2-x}$ lorsque $x$ tend vers 2. On a $\lim\limits_{x\to 2} 2-x=0$ donc, pour travailler par inversion, il est nécessaire de connaître le signe de $2-x$ au voisinage de 2 or si $x<2$, on a $2-x>0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} 2-x=0_+$ et par inversion $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{1}{2-x}=+\infty$ puis si $x>2$, on a $2-x<0$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} 2-x=0_-$ et par inversion $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{1}{2-x}=-\infty$.

**Propriété 18** *Quotient*

La limite du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

| $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ / $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0_+$ | $0_-$ | $\ell'$ $(\ell'>0)$ | $\ell'$ $(\ell'<0)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $+\infty$ | | | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | | | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| 0 | 0 | 0 | | | 0 | |
| $\ell$ $(\ell>0)$ | 0 | 0 | $+\infty$ | $-\infty$ | $\dfrac{\ell}{\ell'}$ | |
| $\ell$ $(\ell<0)$ | | | $-\infty$ | $+\infty$ | | |

**Remarque**

- Dans le cas particulier où $f$ est une fonction polynomiale, on peut retenir le résultat suivant.

  Au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, $f$ se comporte comme son monôme de plus haut degré. En effet, considérons une fonction $f$ polynomiale de degré $k$. On a donc $f(x)=a_k x^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x+a_0$ où $a_k$, $a_{k-1}$, …, $a_1$ et $a_0$ sont des réels avec $a_k\neq 0$. Pour $x\neq 0$, on peut écrire $f(x)=a_k x^k\left(1+\frac{a_{k-1}}{a_k}\times\frac{1}{x}+...+\frac{a_1}{a_k}\times\frac{1}{x^{k-1}}+\frac{a_0}{a_k}\times\frac{1}{x^k}\right)$

or, pour tout entier $k$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^k}=0$ donc par produit et par somme

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a_{k-1}}{a_k}\times\frac{1}{x}+...+\frac{a_1}{a_k}\times\frac{1}{x^{k-1}}+\frac{a_0}{a_k}\times\frac{1}{x^k}\right)=1.$$

Ainsi, lorsque $x$ tend vers $\pm\infty$, $f(x)$ se comporte comme $a_k x^k$ autrement dit

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} a_k x^k.$$

- Dans le cas particulier où $f$ est une fonction rationnelle, on peut retenir le résultat suivant.

  Au voisinage de $+\infty$ ou de $-\infty$, une fonction rationnelle se comporte comme le quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

  Ce résultat découle du précédent sachant qu'une fonction rationnelle est le quotient de deux fonctions polynomiales.

## 5. Limites et inégalités : théorèmes de comparaison et compatibilité avec l'ordre

On admet que les théorèmes rencontrés et démontrés lors de l'étude de limites de suites sont encore vrais dans le cas où des limite de fonctions en un réel $a$, en $+\infty$ ou en $-\infty$.

| Si, pour $x$ au voisinage de $\alpha$ où $\alpha$ désigne un réel $a$ ou $+\infty$ ou $-\infty$ … | … et si … | … alors … |
|---|---|---|
| $f(x)\geq u(x)$ | $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)=+\infty$ | $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=+\infty$ |
| $f(x)\leq v(x)$ | $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x)=-\infty$ | $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=-\infty$ |
| $u(x)\leq f(x)\leq v(x)$ | $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)=L$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} v(x)=L$ | $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=L$ (théorème des gendarmes) |
| $\lvert f(x)-L\rvert\leq u(x)$ | $\lim\limits_{x\to\alpha} u(x)=0$ | $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=L$ |
| $f(x)<g(x)$ ou $f(x)\leq g(x)$ | $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=L$ et $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=L'$ | $L\leq L'$ (compatibilité avec l'ordre) |

## 6. Limite d'une fonction composée

On admet le résultat suivant :

**Théorème 1**

Soit $f$ la fonction définie sur un intervalle I comme composée des fonctions $g$ et $h$, c'est-à-dire que pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a $f(x) = h \circ g(x) = h\big(g(x)\big)$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[rr, bend right] & g(x) = X \arrow[r, mapsto, "h"] & f(x) = x(X) = h\big(g(x)\big) \end{tikzcd}$$

Dans ce qui suit, $\alpha$, $\beta$ et $L$ peuvent désignés des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

On suppose que $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \beta$ et que $\lim\limits_{X \to \beta} h(X) = L$ alors on peut en déduire que $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = L$.

▶ Exemple 2

**a)** Déterminer la limite en $-\infty$ de $\sqrt{x^2+1}$.

**b)** Déterminer la limite à droite de 2 de $\sqrt{\dfrac{x^2-x-3}{2-x}}$.

**c)** Déterminer la limite en $+\infty$ de $x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

▶ **Solution**

**a)** La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est la composée de $x \mapsto x^2+1$ et de $X \mapsto \sqrt{X}$ or $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2+1 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$, on peut donc écrire $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2+1} = \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$ par composition avec $X = x^2+1$.

**b)** La fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2-x-3}{2-x}}$ est la composée de $x \mapsto \dfrac{x^2-x-3}{2-x}$ et de $X \mapsto \sqrt{X}$.

On détermine tout d'abord la limite de la fonction rationnelle $x \mapsto \dfrac{x^2-x-3}{2-x}$ à droite de 2.

Comme $\lim\limits_{x \to 2} x^2-x-3 = -1 < 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} 2-x = 0\_$ (car $2-x<0$ lorsque $x>2$), on a par quotient $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} \dfrac{x^2-x-3}{2-x} = +\infty$. Puis $\lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$

on peut donc écrire $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x^2-x-3}{2-x} == \lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$ par composition avec $X = \frac{x^2-x-3}{2-x}$.

**c)** On remarque que pour $x \neq 0$, $x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ or $x \mapsto \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ est la composée de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et de $X \mapsto \frac{\sin X}{X}$. De plus, on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$ donc on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to 0} \frac{\sin X}{X} = 1$ par composition avec $X = \frac{1}{x}$.

## 7. Suites et fonctions

On admet la propriété suivante :

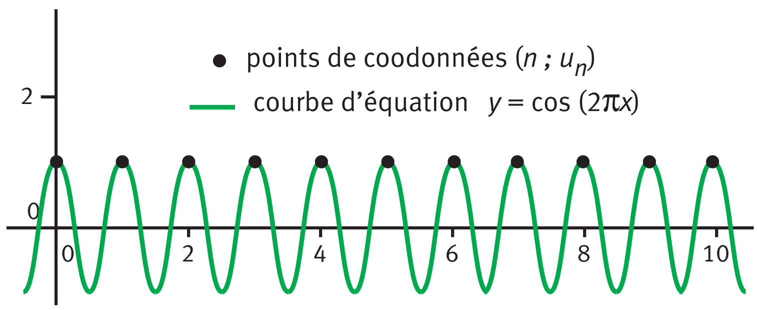
**Propriété 19**

Soit $(u_n)$ une suite de terme général $u_n = f(n)$ où $f$ est une fonction définie au voisinage de $+\infty$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ($\ell$ étant fini ou non) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

***Remarque*** La réciproque de cette propriété est fausse.

Prenons par exemple la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \cos(2\pi n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ ; on a donc $u_n = 1$, ainsi $(u_n)$ est convergente vers 1 alors que la fonction $f$ définie par $f(x) = \cos(2\pi x)$ n'a pas de limite en $+\infty$, résultat que l'on admet mais que l'on peut constater à partir d'une représentation graphique.



- Dans le cas particulier où $f$ est une fonction polyniomale, c'est à dire lorsque $f(x)=a_k x^k+a_{k-1}x^{k-1}+...+a_1x+a_0$ où $a_k$, $a_{k-1}$, …, $a_1$ et $a_0$ sont des réels avec $a_k \neq 0$, on sait que $f(x)$ se comporte en $\pm\infty$ comme le monôme de plus haut degré, à savoir $a_k x^k$ et on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} a_k x^k$.

  Ainsi, lorsqu'une suite $(u_n)$ a pour terme général $u_n=f(n)$ avec $f$ une fonction polynomiale, on peut en déduire que $u_n$ se comporte en $+\infty$ comme le monôme de plus haut degré en $n$.

- Du résultat ci-dessus et des résultats sur les limites de fonctions, on peut déduire que lorsqu'une suite $(u_n)$ a pour terme général $u_n=f(n)$ avec $f$ une fonction rationnelle, on peut en déduire que $u_n$ se comporte en $+\infty$ comme le quotient des monômes de plus haut degré en $n$ du numérateur et du dénominateur.

▶ Exemple 3 Déterminer la limite des suites de terme général :

$$a_n=n^2-3+2n-5n^3,\quad b_n=\frac{3n^2-1}{2n^2-n}\quad \text{et}\quad c_n=\frac{2n+1}{3-n^3}.$$

▶ **Solution** On a :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-3+2n-5n^3=\lim\limits_{n\to+\infty} -5n^3=-\infty$ ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2-2}{2n^2-n}=\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n^2}{2n^2}=\dfrac{3}{2}$ ;
- $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n=\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{3-n^3}=\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n}{-n^3}=\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{2}{n^2}=0.$

On admet le résultat suivant :

**Propriété 20** *Composition*

Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle I, $(v_n)$ une suite de réels appartenant à l'intervalle I et $(u_n)$ la suite de terme général $u_n=f(v_n)$.

Pour obtenir $v_n$, on enchaine donc la suite $(v_n)$ puis la fonction $f$ selon le schéma : $n\mapsto v_n\mapsto u_n=f(v_n)$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=\alpha$ ($\alpha$ étant fini ou non) et si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\ell$ ($\ell$ étant fini ou non) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$.

▶ Exemple 4 Déterminer la limite des suites de terme général :

$$a_n=\sqrt{n^2-n+1} \text{ et } b_n=\sqrt{\frac{4n^2-3}{n^2+n}}.$$

▶ **Solution**

- Tout d'abord $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2-n+1=\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ donc, par composition :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2-n-1}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty.$$

- Tout d'abord $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n^2-3}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{4n^2}{n^2}=4$ or $\lim\limits_{x\to4}\sqrt{x}=2$ donc, par composition :

$$\lim_{n\to+\infty} b_n=\lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{4n^2-3}{n^2+n}}=\lim_{x\to4}\sqrt{x}=2.$$

## 8. Exemples et méthodes

Les exemples ci-dessous sont à considérer comme des méthodes qui sont fréquemment utilisées pour le calcul de limites de fonctions. Le choix de la méthode utilisée dépend du type d'expression de la fonction (somme, produit, quotient, fonction polynomiale, fonction rationnelle, composée, etc.). Avant tout calcul, il est donc primordial de déterminer le type d'expression dont on souhaite déterminer la limite.

▶ Exemple 5

**a)** Déterminer les limites de $f(x)=x^4-3x+1$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

**b)** Déterminer les limites de $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ aux bornes de l'ensemble de définition de $f$.

**c)** Déterminer la limite de $f(x)=\dfrac{\tan x}{x}$ en 0.

*On remarquera que, pour* $x\neq0$, $f(x)=\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ *où* $g(x)=\tan x$.

**d)** Déterminer la limite de $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x}$ en 0.

**e)** Déterminer la limite de $f(x)=\sqrt{x}-x$ en $+\infty$.

**f)** Déterminer les limites de $f(x)=2x-\sqrt{4x^2+1}$ aux bornes de l'ensemble de définition de $f$.

**g)** Déterminer la limite en $-\infty$ de $f(x)=\dfrac{x-\sin x}{3x+1}$.

**▶ Solutions**

**a)** • La fonction $f$ est un fonction polynomiale. On cherche les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ on peut donc utiliser le fait qu'en $-\infty$ et en $+\infty$, une fonction polynomiale a les mêmes limites que son monôme de plus haut degré.

On obtient donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^4 - 3x + 1 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 - 3x + 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} x^4 = +\infty$.

• On peut noter que, si l'on n'utilise pas cette remarque, la méthode habituelle déjà vue lors du calcul de limites de suites est toujours valable. On transforme ainsi l'expression de $f(x)$ en factorisant par son monôme de plus haut degré et pour $x \neq 0$, on a $f(x) = x^4 - 3x + 1 = x^4\left(1 - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{1}{x^4}\right)$. L'expression considérée est alors un produit, on cherche donc la limite de chacun des facteurs et on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$ puis $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{1}{x} = 1$ (par somme car $\lim\limits_{x \to -\infty} -\dfrac{3}{x^3} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ ) donc, par produit, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
La démarche est analogue en $+\infty$.

**b)** La fonction $f$ est un fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\ ;\ 2\}$. On cherche les limites en $-\infty$, $-2$, $2$ et $+\infty$.

• Pour déterminer les limites de $f(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$, on peut donc utiliser le fait qu'en $-\infty$ et en $+\infty$, une fonction rationnelle a les mêmes limites que le quotient des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur. On obtient donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$.

Si l'on n'utilise pas cette remarque, on applique la méthode habituelle. On transforme ainsi l'expression de $f(x)$ en factorisant numérateur et dénominateur par son monôme de plus haut degré donc, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\ ;\ 2\}$ et $x \neq 0$, on a $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \dfrac{x^2(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2})}{x^2(1 - \frac{4}{x^2})} = \dfrac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}}$.

L'expression considérée est alors un quotient, on cherche donc la limite de du numérateur et du dénominateur. On obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{x^2} = 1$ puis $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \dfrac{4}{x^2} = 1$ donc, par quotient, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$. La démarche est analogue en $+\infty$.

- Étudions la limite en $-2$. Comme $f(x)$ est un quotient, on détermine la limite du numérateur et du dénominateur. On a $\lim_{x\to-2} x^2-3x+2=12>0$ et $\lim_{x\to2} x^2-4=0$.

  Pour conclure, il apparaît nécessaire de déterminer le signe de $x^2-4$ au voisinage de $-2$.

  Pour $x<-2$, on a $x^2>4$ donc $x^2-4>0$ de sorte que $\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} x^2-4=0_+$ et, par quotient, $\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=+\infty$.

  Pour $x$ au voisinage de $-2$ et $x>-2$, on a $x^2<4$ donc $x^2-4<0$ de sorte que $\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} x^2-4=0_-$ et, par quotient, $\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty$.

- Étudions la limite en 2. Comme précédemment, on détermine la limite du numérateur et du dénominateur. On a $\lim_{x\to2} x^2-3x+2=0$ et $\lim_{x\to2} x^2-4=0$.
  Par quotient, nous sommes donc en présence d'un cas d'indétermination c'est-à-dire que les propriétés du cours concernant le quotient de limites ne permettent pas de conclure. Il faut donc procéder autrement.

  Le numérateur et le dénominateur d'une fonction rationnelle sont des polynômes de degré 2 que l'on sait factoriser.

  D'une part, $x^2-4=(x-2)(x+2)$.

  D'autre part, $x^2-3x+2$ a pour discriminant $\Delta=1$ et pour racines 1 et 2 donc $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$.

  Il apparaît donc que le numérateur et le dénominateur sont tous les deux factorisables par $x-2$.
  Ainsi, pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\,;\,2\}$, on a $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}=\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}=\dfrac{x-1}{x+2}$

  or $\lim_{x\to2} x-1=1$ et $\lim_{x\to2} x+2=4$ donc par quotient, $\lim_{x\to2} f(x)=\dfrac{1}{4}$.

**c)** La fonction $f$ étant un quotient, on détermine la limite du numérateur et du dénominateur.

On a $\lim_{x\to0} \tan x=0$ et $\lim_{x\to0} x=0$ donc par quotient, nous sommes comme dans l'exemple précédent en présence d'un cas d'indétermination. La méthode adoptée précédemment n'est pourtant plus valable car $f(x)$ n'est pas un quotient de deux polynômes.

Ainsi qu'il est précisé dans l'indication, on remarque que, pour $x\neq0$, $f(x)=\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ où $g(x)=\tan x$ or on sait que lorsque $g$ est dérivable en 0, le taux d'accroissement $\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ admet une limite finie en 0 et on a $\lim_{x\to0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)$.

Dans le chapitre 2, lors de l'exemple 1, on a montré que la fonction tangente est dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ et que pour tout $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$, $(\tan)'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$. On a donc $g$ dérivable en 0 et $g'(0)=1$.

Finalement $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=1$

**d)** Rapidement, de tête, on remarque que $f(x)$ est un quotient, on détermine la limite du numérateur et du dénominateur or $\lim\limits_{x\to 0}\sin^2 x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x=0$ donc les propriétés du cours concernant le quotient de limites ne permettent pas de conclure.

- En suivant la démarche vue précédemment, on remarque que, pour $x\neq 0$, $f(x)=\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}$ où $g(x)=\sin^2 x$.

  Pour $x\in\mathbb{R}$, $g(x)=\sin^2 x=\sin x\times\sin x$ donc $g$ peut être vue comme le produit de $x\mapsto\sin x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ par elle-même ainsi $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc en 0.

  Formule utilisée : $(uv)'=uv'+u'v$ $\left(uv\right)'=uv'+u'v$.

  Pour $x\in\mathbb{R}$, $g'(x)=\sin x\times\cos x+\sin x\times\cos x=2\times\sin x\times\cos x$

  puis $g'(0)=0$.

  Finalement $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=0$.

- On peut sur cet exemple, dégager une autre méthode habituelle qui est de se ramener à un résultat de cours. En effet, en observant l'expression de $f(x)$, en constatant l'indétermination, on cherche une propriété du cours sur les fonctions trigonométriques permettant de lever une indétermination lors du calcul d'une limite en un réel : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. On transforme alors l'expression de $f(x)$ de façon à faire apparaître ce résultat.

  On a par exemple, $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x}=\sin x\times\dfrac{\sin x}{x}$ or $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ donc par produit $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$.

**e)** Rapidement, de tête, on remarque que $f(x)$ s'écrit comme une somme, on détermine donc la limite de chaque terme or $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}-x=-\infty$ donc par somme, les propriétés du cours concernant les sommes de limites ne permettent pas de conclure.

On retrouve une méthode habituelle déjà rencontrée lors du calcul de limites de suites qui consiste à transformer l'expression de $f(x)$ à l'aide d'une factorisation. Dans le cas présent, une factorisation par $x$ ou par $\sqrt{x}$ conduit au résultat. On a par exemple $f(x)=\sqrt{x}-x=\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)$ or $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\sqrt{x}=-\infty$ donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.

**f)** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $4x^2+1>0$ donc $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et on cherche les limites de $f(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$. On remarque que $f(x)$ s'écrit comme une somme, on détermine donc la limite de chaque terme.

- D'une part, le premier terme $2x$ est l'expression d'une fonction de référence et on a $\lim\limits_{x\to-\infty} 2x=-\infty$. D'autre part, le deuxième terme $\sqrt{4x^2+1}$ est l'expression de la composée $x \mapsto 4x^2+1$ suivie de $X \mapsto \sqrt{X}$, on travaille donc par composition. On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} 4x^2+1=+\infty$ puis $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{4x^2+1}=\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X}=+\infty$ par composition avec $X=4x^2+1$. Finalement, par différence, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

- En $+\infty$, l'analyse de l'expression de $f(x)$ conduit à une indétermination. Pour conclure, on est amené à transformer l'expression de $f(x)$ et, pour ce faire, on pense utiliser l'expression conjuguée, méthode habituelle déjà rencontrée lors du calcul de limites de suites. On a :

$$f(x)=2x-\sqrt{4x^2+1}=\frac{\left(2x-\sqrt{4x^2+1}\right)\left(2x+\sqrt{4x^2+1}\right)}{2x+\sqrt{4x^2+1}}=\frac{-1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}$$

Après avoir analysé l'expression obtenue, on peut écrire $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^2+1=+\infty$ donc, par composition avec $X=4x^2+1$, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{4x^2+1}=\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X}=+\infty$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x=+\infty$ donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x+\sqrt{4x^2+1}=+\infty$ puis par inversion $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2x+\sqrt{4x^2+1}}=0$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

**g)** On retrouve une méthode habituelle déjà rencontrée lors du calcul de limites de suites que l'on adapte ici. On cherche la limite en $-\infty$ d'une expression dans laquelle on trouve $\sin x$, on pense donc à encadrer ce nombre pour se ramener à appliquer les théorèmes de comparaison ou le théorème des gendarmes.

Pour $x \in \mathbb{R}$, $-1 \le \sin x \le 1$ donc $x-1 \le x-\sin x \le x+1$ puis, comme on travaille en $-\infty$, on peut supposer $x<-\dfrac{1}{3}$ de sorte que $3x+1<0$ et qu'en divisant chaque membre de l'inégalité précédente on ait

$$\frac{x-1}{3x+1} \ge \frac{x-\sin x}{3x+1} \ge \frac{x+1}{3x+1}.$$

On est alors amené à calculer la limite en $-\infty$ de deux fonctions rationnelles d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-1}{3x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x+1}{3x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{3x}=\dfrac{1}{3}$. Ainsi, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\dfrac{1}{3}$.

# D Exercices d'apprentissage

## Exercice 4 *Calcul de limites*

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \dfrac{x+1}{4-x^2}$ ; b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{2x+1}{3x^2-x+1}\right)$ ; c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{1-x^2}$ ;

d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3x^2+\sin x}{x^2+3}$ ; e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1}$ ; f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2(3x)}{x^2}$.

## Exercice 5 *Calculatrice et fenêtre graphique*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=x^4-10006x^3+60011x^2-110006x+60000.$$

Préciser les limites de $f$ en $-\infty$ et $+\infty$ puis proposer une fenêtre permettant de visualiser sur la calculatrice la représentation graphique de $f$, notamment les résultats démontrés.

## Exercice 6 *QCM*

Pour chaque question, une seule proposition est valable. Donner la lettre corres-

| | Les questions… | Les propositions… A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Que vaut $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ ? | $0$ | $+\infty$ | $\dfrac{1}{2}$ | $1$ |
| 2 | Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x-1000\sin x$. Quelle est la limite de $f$ en $+\infty$ ? | Elle n'existe pas | $+\infty$ | $-\infty$ | $-1000$ |
| 3 | Combien la courbe d'équation $y=\dfrac{2x^2-x+1}{x^2-1}$ admet-elle de droites asymptotes ? | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
| 4 | Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{x+\sin x}{x}$. On prolonge la définition de $f$ à $\mathbb{R}$ en posant $f(0)=a$. Peut-on trouver un réel $a$ tel $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ ? | C'est impossible | $a=0$ | $a=1$ | $a=2$ |

| | Les questions… | Les propositions… A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|---|
| 5 | La fonction $f$ est définie sur $]0\,;+\infty[$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$. On pose $g(x)=f(\frac{1}{x})$. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ? | 0 | 1 | $+\infty$ | Elle n'existe pas |
| 6 | Avec le même énoncé qu'à la question 5, que vaut $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} g(x)$ ? | 0 | 1 | $+\infty$ | Elle n'existe pas |

## Exercice 7 *Asymptotes*

Soient $f$ la fonction définie par $f(x)=\dfrac{(2x-5)(x^2+x-2)}{2x^2-9x+10}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. **a)** En s'appuyant sur une représentation graphique obtenue à l'aide du logiciel Geogebra ou de la calculatrice, que peut-on conjecturer concernant le domaine de définition de $f$, ses limites et les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}_f$ ?

   **b)** Soit $\Delta$ la droite d'équation $y=x+3$. Que semble-t-elle avoir de remarquable pour la courbe $\mathscr{C}_f$ ?

2. Déterminer le domaine de définition $D$ de $f$ puis calculer les limites de $f$ aux bornes de $D$.

3. **a)** Montrer que pour tout $x\in D$, $f(x)-(x+3)=\dfrac{4}{x+2}$.

   **b)** Déterminer les limites de $f(x)-(x+3)$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Ce résultat semble-t-il cohérent avec les constatations faite à la question 1 ?

   **c)** Étudier les positions relatives de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite $\Delta$.

## Exercice 8 *Asymptotes*

Soient $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par $f(x)=\dfrac{2x^3-6x^2+9}{2(x-2)^2}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique 1 cm.

1. Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les éventuelles droites asymptotes se déduisant du calcul de ces limites.

2. Pour $x \neq 2$, on note $d(x) = f(x) - (x+1)$. Ainsi $d(x)$ représente l'écart algébrique entre la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\Delta$ d'équation $y = x+1$ mesuré sur une verticale d'abscisse $x$.

   a) Calculer la limite de $d(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.

   b) Résoudre sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ l'inéquation $|d(x)| \leq 1$. Interpréter graphiquement le résultat.

   c) Etudier le signe de $d(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

3. Montrer que, pour tout $x \neq 2$, $f'(x) = \dfrac{(x-3)(x^2-3x+3)}{(x-2)^3}$ puis étudier les variations de $f$.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ en prenant en compte les divers éléments mis en évidence au cours de l'exercice.

# 4 Continuité d'une fonction

## A Objectifs du chapitre

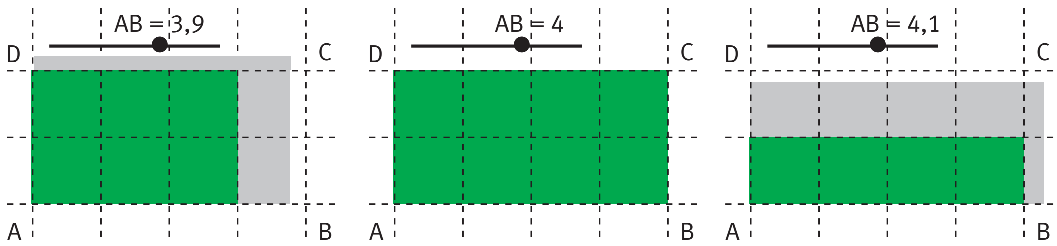
On présente dans ce chapitre, la notion de continuité d'une fonction. On en donnera deux applications : la première permettant de déterminer la limite de certaines suites convergentes, la seconde permettant de justifier de solutions à certaines équations. Enfin, nous travaillerons sur les valeurs approchées de solutions d'équations.

## B Pour débuter

D'après activité proposée par l'académie d'Orléans-Tour.

■ **Activité 6** Le quadrilatère ABCD est un rectangle de dimensions variables mais dont le périmètre reste constant égal à 12cm.

Dans ce rectangle, on range des carrés de côtés 1 cm sans les découper de manière à former le plus grand rectangle possible contenu dans ABCD.




On note $x$ la longueur AB et on s'intéresse à la fonction $f$ qui à $x$ associe le nombre de carrés contenus dans ABCD.

❶ Afin de visualiser la situation, créer sous GeoGebra un rectangle ABCD dont on pourra choisir la longueur AB à l'aide d'un curseur et dont le périmètre reste constant égal à 12.

On pourra alors s'appuyer sur la grille pour visualiser les petits carrés à l'intérieur du rectangle ABCD.

❷ Tableau de valeurs – En vous appuyant sur la figure dynamique, compléter le tableau de valeurs ci-dessous

| $x$ Longueur AB | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 | 4,5 | 5 | 5,5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ Nombre de carrés dans ABCD | | | | | | | | | | | | | |

### ❸ Étude au voisinage de 4

Déterminer $f(3{,}9)$ et $f(3{,}99)$. Que dire de $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} f(x)$ ?

De même, déterminer $f(4{,}1)$, $f(4{,}01)$ et préciser $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x>4}} f(x)$.

### ❹ Représentation graphique

**a)** Donner l'expression de $f(x)$ selon les valeurs de $x$ dans l'intervalle [0 ; 6] et tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant $f$.

**b)** Quelle est la particularité de $\mathscr{C}_f$ ?

### ❺ Complément : *Création de la courbe sous GeoGebra*

On reprend et on poursuit la figure obtenue dans le ❶.

Considérons pour cela, les points A, B, C et D où A(0 ; 0), B($a$ ; 0), $C(a\ ;\ 6-a)$ et $D(0{,}6-a)$ et $a$ est un cruseur prenant des valeurs de 0 à 6. ABCD est donc un rectangle dont on peut choisir la longueur AB et dont le périmètre reste constant égal à 12.

On construit maintenant le rectangle plus grand rectangle AMNP constitué de petits carrés de côté 1 et inclus dans ABCD.

**a)** À l'aide de la fonction partie entière, exprimer les coordonnées des points M, N et P en fonction de celles des points B, C et D. Placer les points M, N et P sachant que sous GeoGebra, la partie entière d'un réel $x$ s'écrit floor($x$).

**b)** On remarque que le nombre de carrés dans le rectangle AMNP est égal à l'aire de AMNP. Ainsi, pour obtenir le nombre de carrés dans le rectancgle AMNP en fonction de la longueur AB, il suffit de créer dans une deuxième fenêtre graphique, le point de coordonnées (AB, *aire* (AMNP)).

**c)** Visualiser la courbe représentant $f$.

## ■ Activité 7

**Activité préparatoire à l'énoncé du THÉOREME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES et de son COROLLAIRE**

Dans cette activité, on s'intéresse à l'existence et au nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ où $f$ est une fonction définie sur un intervalle I.

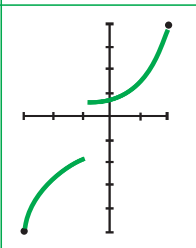
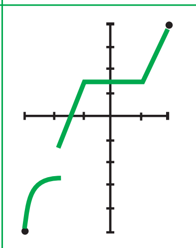
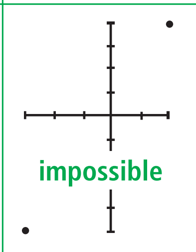
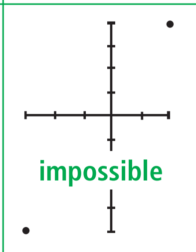
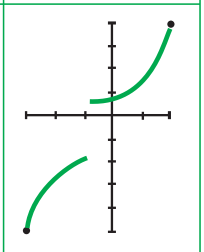
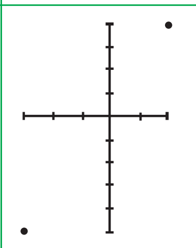
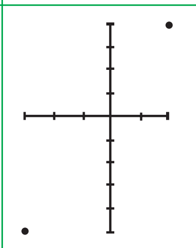
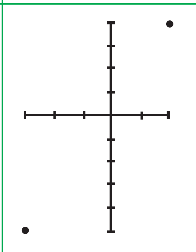
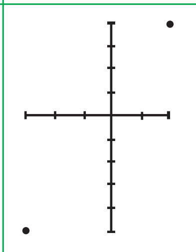
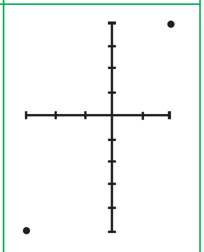
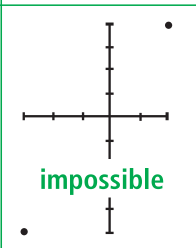
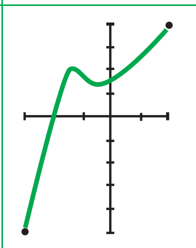
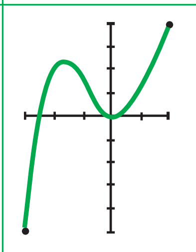
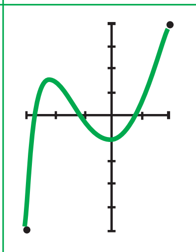
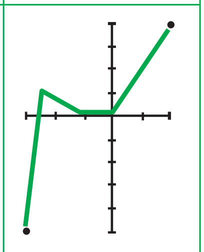
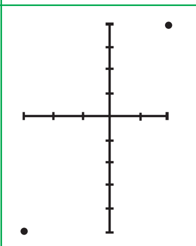
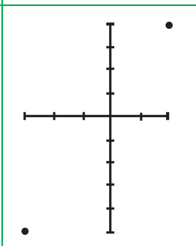
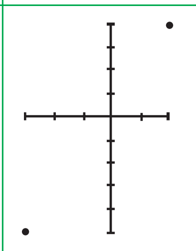
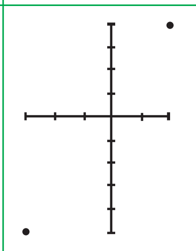
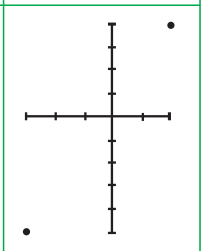
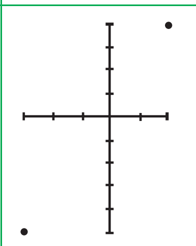
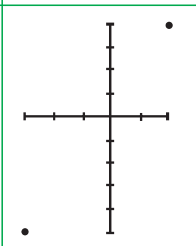
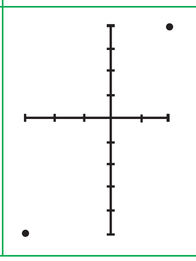
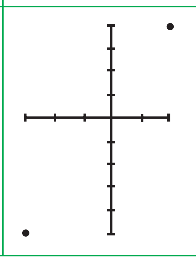
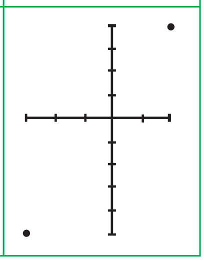
On remarquera que, si le plus petit intervalle contenant toutes les images de $f$ ne contient pas 0 alors l'équation $f(x)=0$ ne peut pas avoir de solution. On se place donc dans le cas où 0 appartient au plus petit intervalle J contenant $f$(I) ; autrement dit, dans le cas où $f$ change de signe sur I.

Soit $f$ une fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=[-3\ ;\ 2]$ vérifiant $f(-3)=-5$, $f(2) = 4$.

On suppose que l'intervalle image de I par $f$ est inclus dans $\mathrm{J}=[-5\ ;\ 4]$ autrement dit, on suppose que : $f([-3\ ;\ 2])\subset[-5\ ;\ 4]$ ou encore que, pour $x\in[-3\ ;\ 2]$, on a $f(x)\in[-5\ ;\ 4]$.

❶ Dans le tableau suivant, $S$ l'ensemble des solutions de l'équation de l'équation $f(x) = 0$.

Compléter le tableau en donnant, lorsque c'est possible, l'allure de la représentation graphique d'une fonction $f$ vérifiant les conditions indiquées.

| | $S$ est vide | $S$ contient exactement une unique solution | $S$ contient exactement deux solutions | $S$ contient exactement trois solutions | $S$ contient une infinité de solutions |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ est croissante sur $I$ |  |  |   |   |  |
| $f$ est strictement croissante sur $I$ |  |  |  |  |  |
| $f$ est continue sur $I$ |   |  |  |  |  |
| $f$ est continue et croissante sur $I$ |  |  |  |  |  |
| $f$ est continue et strictement croissante sur $I$ |  |  |  |  |  |

❷ Outre l'hypothèse $0 \in \left[f(-3);f(2)\right]$, quelle condition apparaît suffisante pour affirmer l'existence de solution(s) à l'équation $f(x)=0$ ?

En supposant cette condition vérifiée, combien l'équation $f(x)=0$ peut-elle avoir de solutions ?

3. Outre l'hypothèse $0 \in \left[f(-3)\ ;\ f(2)\right]$, quelles conditions apparaissent suffisantes pour affirmer l'existence et l'unicité d'une solution à l'équation $f(x)=0$ ?

# C Cours

## 1. Notion de continuité

**Définition 9**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I contenant un réel $a$.

On dit que $f$ est **continue en $a$** si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

On dit que $f$ est **continue sur I** si elle est continue en tout réel de I.

### Illustration graphique

Graphiquement, la courbe représentative d'une fonction continue sur un intervalle I peut être tracée en un seul morceau sur I, sans lever le crayon.

On admet les propriétés suivantes :

**Propriété 21**

Les fonctions polynomiales, rationnelles, racine carrée, valeur absolue, sinus, cosinus ainsi que les sommes, produits, quotients et composées de telles fonctions sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

▸ Exemples et contre-exemples

1. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0)=1$.

   On sait que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$ par suite, $f$ est continue en 0. Par ailleurs, $f$ est le quotient de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ donc $f$ est continue sur $\mathbb{R}^*$. Finalement, $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. On rappelle que la fonction partie entière est définie sur $\mathbb{R}$ pour tout réel $x$, on appelle partie entière de $x$ et on note $\mathrm{E}(x)$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x$.

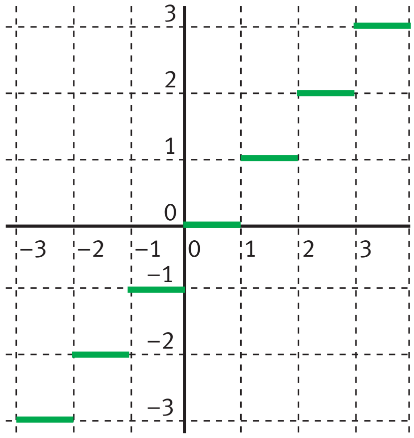
   Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on aura $\mathrm{E}(x)=n$ pour tout $x$ tel que $n \leq x < n+1$.

Il apparaît graphiquement que la fonction E n'est continue en aucun entier.

Par exemple, pour tout $0 \leq x < 1$,

on a $E(x) = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} E(x) = 0$

or $E(1) = 1$ et E n'est pas continue en 1.




Une démonstration analogue peut être faite en n'importe quel entier.

On admet la propriété suivante :

**Propriété 22**

Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

*Remarques*

- La réciproque de cette propriété est fausse. En effet, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ en revanche, elle n'est pas dérivable en 0.
- Voici à titre d'information la démonstration de la précédente propriété (non exigible).

Supposons que $f$ soit dérivable sur un intervalle $I$ et soient $a$ et $x$ deux réels distincts de $I$.

On a alors :

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) \text{ or } \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

par composition en posant $h = x - a$ d'où $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ car $f$ est dérivable en $a$. Comme $\lim\limits_{x \to a} x - a = 0$, on obtient par produit $\lim\limits_{x \to a} f(x) - f(a) = 0$,

c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ou encore $f$ continue en $a$.

## 2. Application aux suites définie par $u_{n+1} = f(u_n)$

**Propriété 23**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I et $(u_n)$ une suite de réels de I définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si la suite $(u_n)$ est convergente vers un réel $\ell$ et si $f$ est continue en $\ell$ alors $f(\ell) = \ell$.

■ *Démonstration*

On donne ici la démonstration dans le cas général de la propriété annoncée. Toutefois, comme on le verra dans les exemples qui suivent, cette propriété devra être redémontrée à chaque fois qu'elle sera utilisée en adaptant la démonstration au cadre de l'énoncé.

Par hypothèse, $(u_n)$ est convergente vers $\ell$.

D'une part, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ de sorte que, par composition avec $X = u_n$, on ait $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \lim\limits_{X\to\ell} f(X)$ puis, comme $f$ est continue en $\ell$, on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell).$$

D'autre part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ ainsi, par unicité de la limite, on a bien $f(\ell) = \ell$.

▶ Exemple 6

❶ Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

**a)** Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \le u_{n+1} \le u_n \le 10$.

**b)** En déduire la convergence de $(u_n)$ vers un réel à déterminer.

❷ Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

**a)** Montrer par récurrence que $(u_n)$ minorée par 1 puis en déduire les variations de $(u_n)$.

**b)** Montrer que la suite $(u_n)$ ne peut être majorée. En déduire la limite de $(u_n)$.

▶ **Solution**

❶ **a)** On raisonne par réccurence. On a $u_0 = 10$ et $u_1 = \sqrt{10} \approx 3{,}2$ donc $1 \le u_1 \le u_0 \le 10$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \le u_{k+1} \le u_k \le 10$ alors $\sqrt{1} \le \sqrt{u_{k+1}} \le \sqrt{u_k} \le \sqrt{10}$ car $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur [1 ; 10]. Comme $\left[1\,;\sqrt{10}\right] \subset \left[1\,;10\right]$, on obtient $1 \le u_{k+2} \le u_{k+1} \le 10$ et la propriété est héréditaire.

Finalement, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \le u_{n+1} \le u_n \le 10$.

**b)** De ce qui précède, on déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \le u_n$ donc la suite $(u_n)$ est décroissante, et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \le u_n \le 10$ donc la suite $(u_n)$ est minorée par 1. Par le théorème de la convergence monotone, la suite $(u_n)$ est donc convergente. En notant $\ell$ sa limite, on remarque que $1 \le \ell \le 10$ (par passage à la limite dans l'inégalité $1 \le u_n \le 10$).

Pour déterminer la limite, on utilise la propriété ci-dessus que l'on redémontre.

D'une part, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\ell$. D'autre part, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\ell$ de sorte que, par composition avec $X=u_n$ , on ait $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{u_n}=\lim\limits_{X\to\ell}\sqrt{X}=\sqrt{\ell}$ car $x\mapsto\sqrt{x}$ est continue en $\ell$. Finalement, par unicité de la limite, on a $\sqrt{\ell}=\ell$ . Donc $\ell$ est solution de l'équation $\sqrt{x}=x$.

Comme $1\le\ell\le10$, on résout :

$\sqrt{x}=x$ sur l'intervalle [1 ; 10].

$\sqrt{x}=x \Leftrightarrow x=x^2 \Leftrightarrow x(1-x)=0 \Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$

et sur [1 ; 10], l'équation a une unique solution qui est 1. Ainsi $\ell=1$.

❷ **a)** On raisonne par récurrence. On a $u_0=1$ donc $u_0\ge1$. Supposons que pour $k\in\mathbb{N}$, $u_k\ge1$ alors $u_k>0$ puis $\dfrac{1}{u_k}>0$ et par somme $u_k+\dfrac{1}{u_k}\ge1$, c'est-à-dire $u_{k+1}\ge1$. Ainsi, par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\ge1$.

Il en découle que pour $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{u_n}>0$ et $(u_n)$ est croissante.

**b)** On raisonne ici par l'absurde en supposant que $(u_n)$ est majorée. Dans ce cas, la suite $(u_n)$ étant croissante et majorée, elle est convergente vers un réel $\ell$ selon le théorème de la convergence monotone. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\ge1$ donc par passage à la limite, $\ell\ge1$.

Par composition avec $X=u_n$ , on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+\dfrac{1}{u_n}=\lim\limits_{X\to\ell} X+\dfrac{1}{X}$. La fonction $x\mapsto x+\dfrac{1}{x}$ est continue sur $\left[1\,;\,+\infty\right[$ comme somme des fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ toutes les deux continues sur $\left[1\,;\,+\infty\right[$.

Comme $\ell\ge1$, $x\mapsto x+\dfrac{1}{x}$ est donc continue en $\ell$ et on a

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n+\dfrac{1}{u_n}=\lim\limits_{X\to\ell} X+\dfrac{1}{X}=\ell+\dfrac{1}{\ell}$.

De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}=\ell$ donc par unicité de la limite, on obtient $\ell=\ell+\dfrac{1}{\ell}$ c'est-à-dire, $\ell$ solution de l'équation $x=x+\dfrac{1}{x}$. Or $x=x+\dfrac{1}{x}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x}=0$ et l'équation n'admet pas de solution. On obtient donc une contradiction ce qui signifie que l'hypothèse faite au départ n'est pas vérifiée et $(u_n)$ n'est donc pas majorée.

Finalement, $(u_n)$ est une suite croissante et non majorée donc

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ (propriété du cours sur les suites).

## 3. Application : le théorème des valeurs intermédiaires

De l'activité 2, on met en évidence les deux résultats ci-dessous. Le théorème est admis.

**Théorème 2**

*Théorème des valeurs intermédiaires*

Soit $f$ une fonction définie et continue sur un intervalle un intervalle $[a\,;b]$ où $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a < b$.

Pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a\,;b]$.

**Corollaire**

*du théorème des valeurs intermédiaires*

*Cas des fonctions strictement monotones sur un intervalle*

Soit $f$ une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle $[a\,;b]$ où $a$ et $b$ sont deux réels tels que $a < b$.

Pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution sur l'intervalle $[a\,;b]$.

### Démonstration du corrollaire

Avec les hypothèses de l'énoncé, l'existence d'une solution à l'équation $f(x)=k$ est assurée par le théorème des valeurs intermédiaires.

Démontrons l'unicité de cette solution.

Supposons qu'il existe deux réels distincts $\alpha$ et $\alpha'$ de l'intervalle $[a\,;b]$ solutions de l'équation $f(x)=k$. Si $\alpha$ est le plus petit des deux réels, on aurait $\alpha<\alpha'$ et donc $f(\alpha)<f(\alpha')$ ou $f(\alpha)>f(\alpha')$ puisque $f$ est strictement monotone. Ceci est absurde puisque $f(\alpha)=f(\alpha')=k$. Cette conclusion absurde permet d'affirmer que l'hypothèse faite au départ était fausse donc l'équation $f(x)=k$ admet bien une unique solution sur l'intervalle $[a\,;b]$.

**Remarques**

- Par définition, une fonction définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J est appelée bijection de I dans J si tout réel de l'intervalle image admet un et un seul antécédent par $f$.

  Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, si $f$ une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle un intervalle $[a\,;b]$, $f$ réalise une bijection de l'intervalle $[a\,;b]$ dans l'intervalle image $f\left(\left[a\,;b\right]\right)$, à savoir $[f(a)\,;f(b)]$ ou $[f(b)\,;f(a)]$ selon que $f$ est strictement croissante ou strictement décroissante sur $[a\,;b]$.

- On admet le prolongement du théorème et de son corollaire au cas où $f$ est définie sur un intervalle ouvert $]a\,;\,b[$ ou semi-ouvert $[a\,;\,b[$ ou $]a\,;\,b]$ avec $a$ et $b$ finis ou infinis. Dans ce cas, l'énoncé des théorèmes est à adapter en considérant les limites en $a$ ou en $b$ au lieu des images de ces réels.

- Afin de facilité la rédaction lors de l'utilisation du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on convient que les flèches obliques utilisées dans les tableaux de variations, traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

▶ Exemple 7

❶ On donne ci-dessous les variations et les limites de deux fonctions $f$ et $g$.

| $x$ | $-\infty$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $1$ | ↘ | $-6$ | ↗ | $0$ |

| $x$ | $-5$ | | $-3$ | | $0$ | | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $g$ | $1$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ ‖ $-\infty$ | ↗ | $1$ |

**a)** Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ ainsi que le meilleur encadrement de chacune des solutions.

**b)** Donner le nombre de solutions de l'équations $g(x)=10$ ainsi que le meilleur encadrement de chacune des solutions.

❷ Démontrer que l'équation $x^3+x=3$ admet une unique solution réelle que l'on notera $\alpha$.

Vérifier que $\alpha\in\left[1\,;\,2\right]$ puis donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-3}$.

❸ Soit $f$ une fonction définie et continue de l'intervalle $[0\,;\,1]$ dans lui-même. Montrer que $f$ possède au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\alpha$ de l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $f(\alpha)=\alpha$. Interpréter graphiquement.

▶ **Solutions**

❶ On rappelle que dans les tableaux de variations, les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré. On travaille toujours par intervalles.

**a)** Par lecture du tableau, $f$ est continue sur $\left]-\infty\,;\,3\right]$ et strictement décroissante de $\left]-\infty\,;\,3\right]$ dans $\left[-6\,;1\right[$

or $0\in\left[-6\,;1\right[$ donc par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ a une unique solution sur $\left]-\infty\,;\,3\right]$.

Par lecture du tableau, $f\left(\left[3\,;\,+\infty\right[\right)=\left[-6\,;0\right[$ or $0\notin\left[-6\,;0\right[$ donc $f(x)=0$ n'a pas de solution sur $\left[3\,;\,+\infty\right[$.

Finalement, $f(x)=0$ a une unique $\alpha$ solution sur $\mathbb{R}$ et le meilleur encadrement de $\alpha$ que l'on puisse déduire du tableau de variations est $\alpha < 3$.

**b)** Par lecture du tableau, $f$ est continue sur $\left[-5\,;-3\right[$, strictement croissante sur $\left[-5\,;-3\right[$ et $f\left(\left[-5\,;-3\right[\right)=\left[1\,;+\infty\right[$ or $10\in\left[1\,;+\infty\right[$ donc, par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=10$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\left[-5\,;-3\right[$.

On procède de façon analogue en proposant une rédaction différente. La fonction $f$ étant continue sur $\left]-3\,;0\right[$, strictement croissante sur $\left]-3\,;0\right[$ et $f\left(\left]-3\,;0\right[\right)=\left]-\infty\,;+\infty\right[$ donc, par le corollaire du théorème des valeurs intermédiares, $f$ réalise une bijection de $\left]-3\,;0\right[$ dans $\left]-\infty\,;+\infty\right[$ de sorte que 10 (qui appartient bien à $\left]-\infty\,;+\infty\right[$) admet un et seul antécédent $\beta$ par $f$. Autrement dit, l'équation $f(x)=10$ admet une unique solution $\beta$ sur $\left]-3\,;0\right[$.

Enfin, par lecture du tableau, $f$ admet un maximum égal à 1 sur l'intervalle $\left]0\,;6\right]$ donc l'équation $f(x)=10$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

En résumé, $f(x)=10$ admet deux solutions réelles $\alpha$ et $\beta$ telles que

$$-5<\alpha<-3 \text{ et } -3<\beta<0.$$

**2** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+x-3$ et on s'intéresse aux solutions de l'équation $f(x)=0$.

- Tout d'abord, $f$ est une fonction polynomiale donc $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Puis $f$ est une fonction polynomiale donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2+3$ donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)>0$ et $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Enfin, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ donc $f$ change de signe sur $\mathbb{R}$.

En résumé, $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et change de signe sur $\mathbb{R}$ donc, par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution réelle $\alpha$.

La situation peut être résumée par le tableau ci-contre :

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | $-\infty$ ↗ | 0 | ↗ $+\infty$ |

On a $f(1)=-1<0$ et $f(2)=7>0$ donc $f(1)<0<f(2)$ c'est-à-dire $f(1)<f(\alpha)<f(2)$ donc $1<\alpha<2$ car $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par balayage, on obtient $f(1{,}213) \approx -0{,}002 < 0$ et $f(1{,}214) \approx 0{,}003 > 0$ donc $f(1{,}213) < 0 < f(1{,}214)$ c'est-à-dire $f(1{,}213) < f(\alpha) < f(1{,}214)$ donc $1{,}213 < \alpha < 1{,}214$ car $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

*La méthode d'encadrement des solutions d'une équation par balayage est revue au point 4 de ce chapitre.*

❸ Soit $f$ une fonction définie et continue de l'intervalle [0 ; 1] dans lui-même. Montrer que $f$ possède au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe un réel $\alpha$ de l'intervalle [0 ; 1] tel que $f(\alpha) = \alpha$. Interpréter graphiquement

En posant $g$ la fonction définie sur [0 ; 1] par $g(x) = f(x) - x$, le problème revient à démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet (au moins) une solution $\alpha$. On est donc amené à utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. On vérifie donc si les hypothèses du théorème sont satisfaites.

La fonction $g$ est la somme de $f$, continue sur [0 ; 1], et de $x \mapsto -x$, elle aussi continue sur [0 ; 1] donc, par somme, $g$ est continue sur [0 ; 1].

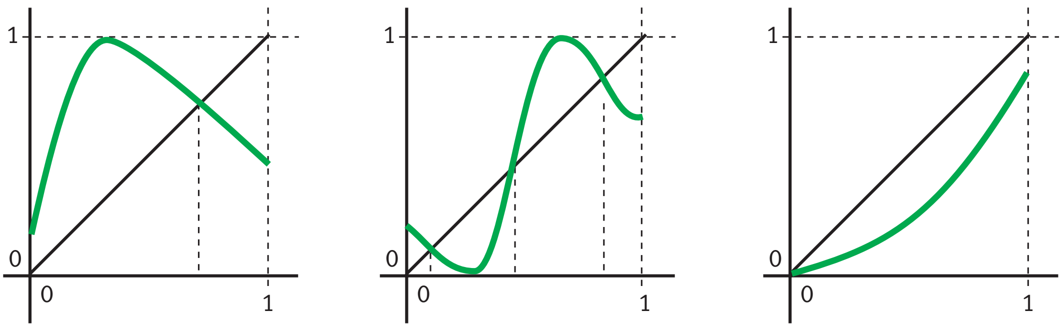
On sait que pour tout $x \in [0\,;\,1]$, on a $0 \le f(x) \le 1$.

Ainsi, d'une part $0 \le f(0) \le 1$ d'où $0 \le f(0) - 0 \le 1$, c'est-à-dire $0 \le g(0) \le 1$ et, d'autre part $0 \le f(1) \le 1$ d'où $-1 \le f(1) - 1 \le 0$ ce qui signifie $-1 \le g(1) \le 0$.

On observe en particulier que $0 \le g(0)$ alors que $g(1) \le 0$. Il y a donc un changement de signe entre $g(0)$ et $g(1)$ et 0 est bien compris entre $g(0)$ et $g(1)$.

Les hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires sont satisfaites donc l'équation $g(x) = 0$ admet (au moins) une solution $\alpha$ sur [0 ; 1] ce qui signifie qu'il existe (au moins) un réel $\alpha$ de l'intervalle [0 ; 1] tel que $f(\alpha) = \alpha$.

Graphiquement, la courbe représentative de $f$ coupe la droite d'équation $y = x$ en (au moins) un point d'abscisse $\alpha$.




▶▶

## 4. Valeurs approchées des solutions de l'équation $f(x) = 0$

### *À partir d'un problème historique : la duplication du cube*

Délos est une petite île de la mer Egée. Les Grecs y avaient élevé de grands sanctuaires au dieu Apollon.

Erathostène raconte que la peste s'étant déclarée, l'oracle d'Apollon avait déclaré qu'elle s'arrêterait quand on lui aurait construit un autel cubique double du précédent. Le dieu ne fit pas cesser l'épidémie tant qu'un autel de côté double fut construit.

Il faut comprendre ici qu'Apollon demandait un autel de volume double, ce qui suppose de construire un cube ayant pour longueur celle du côté de l'autel initial multiplié par racine cubique de 2.

Les Grecs n'en avaient pas trouvé de construction n'utilisant qu'une règle et un compas.

Ce problème ne fut résolu que plus de 2000 ans plus tard, en 1837, par Pierre-Laurent Wantzel (1814-1848) qui l'a transposé dans le domaine algébrique ; il écrit : « pour reconnaître si la construction d'un problème de Géométrie peut s'effectuer avec la règle et le compas, il faut chercher s'il est possible de faire dépendre les racines de l'équation à laquelle il conduit de celles d'un système d'équations du second degré… ».

*Diagonales* (*Les cahiers mathématiques du Cned*,
n° 2 constructions géométriques, année 2003-2004).

En supposant le volume du cube initial égal à 1, on est amené à construire un cube de volume 2 et, en notant $\ell$ la longueur d'un côté de ce dernier cube, on cherche à déterminer un réel positif $\ell$ tel que $\ell^3 = 2$.

Le résultat établi par Wantzel permet d'affirmer que le nombre $\ell$ ainsi définit ne peut pas être construit à la règle et au compas.

Nous nous contenterons donc de déterminer une solution approchée au problème autrement dit, on s'intéresse aux solutions positives de l'équation $f(x) = 0$ où $f(x) = x^3 - 2$.

On remarque que $f$ est continue sur $\left[0\ ;\ +\infty\right[$ car $f$ est une fonction polynomiale.

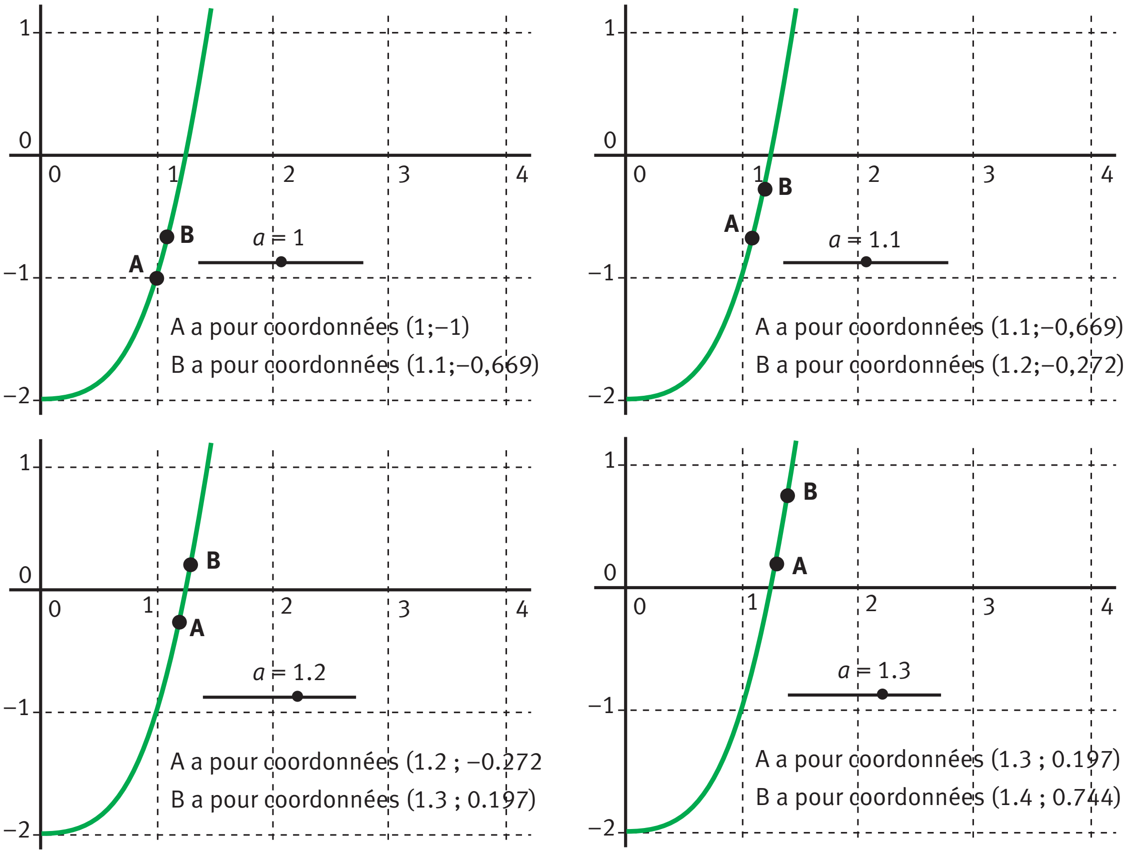
Puis, $f$ est dérivable sur $\left[0\ ;\ +\infty\right[$ car $f$ est une fonction polynomiale et, pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = 3x^2$ de sorte que $f'(x) > 0$ sur $\left[0\ ;+\infty\right[$ ce qui permet d'en déduire que $f$ est strictement croissante sur $\left[0\ ;+\infty\right[$.

On a enfin $f(0) = -2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

Comme $0 \in \left[-2\ ;+\infty\right[$ on peut déduire du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\ell$ positive.

### *Encadrement de la solution de l'équation $f(x)=0$ par balayage*

La démarche algorithmique d'un point de vue graphique est la suivante.
On considère les points A et B de coordonnées respectives $(a\ ;\ f(a))$ et $(b\ ;\ f(b))$ telles que $b=a+h$ où $h$ est un réel positif.
En choisissant une valeur de départ égal à 1 et un pas de $h$ égal à 0,1, on obtient les positions de A et B en travaillant successivement avec $a=1$ puis $a=1{,}1$, $a=1{,}2$, etc ainsi que le montrent les schémas ci-dessous.
On dit qu'on travaille par balayage.




On observe graphiquement qu'un encadrement de la solution $\ell$ de $f(x)=0$ est donné par $a\le\ell\le b$ lorsque les points A et B se situent de part et d'autre de l'axe des abscisses. L'amplitude de l'encadrement est alors de $h$.

En précisant les coordonnées des points A et B sur tableur, on obtient les résultats suivant :
En B1 et en A3, on choisit respectivement le pas et la valeur de départ.
En B3, on entre =A3^3–2
En C3, on entre =A3+B$1
En D3, on entre =C3^3–2
En A4, on entre =C3
Puis les différentes formules sont recopiées vers le bas.

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $h$= | 0,1 | | |
| 2 | *a* | *f(a)* | *b* | *f(b)* |
| 3 | 1 | –1 | 1,1 | –0,669 |
| 4 | 1,1 | –0,669 | 1,2 | –0,272 |
| 5 | **1,2** | **–0,272** | **1,3** | **0,197** |
| 6 | 1,3 | 0,197 | 1,4 | 0,744 |
| 7 | 1,4 | 0,744 | 1,5 | 1,375 |
| 8 | 1,5 | 1,375 | 1,6 | 2,096 |

Plus simplement, il apparaît que l'on peut se contenter du tableau ci-contre.

En effet, pour obtenir un encadrement de la solution d'amplitude *h*, il suffit de choisir le pas *h* ainsi qu'une valeur de départ inférieure à la solution. On repère alors les valeurs de *x* entre lesquelles les images changent de signe.

Avec une amplitude de $0{,}1$, on obtient $1{,}2 < \ell < 1{,}3$.

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | | |
| 2 | x | f(x) |
| 3 | 1 | −1 |
| 4 | 1,1 | −0,669 |
| 5 | **1,2** | **−0,272** |
| 6 | **1,3** | **0,197** |
| 7 | 1,4 | 0,744 |

h=0,1

On peut implémenter l'algorithme sous Algobox ou sur la calculatrice.

Pour cela, il est nécessaire de trouver un moyen d'exprimer le fait que $f(a)$ et $f(b)$ soient de signes contraires.

On remarque que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires si leur produit est négatif alors qu'ils sont de mêmes signes si leur produit est positif.

On obtient alors l'algorithme ci-contre implémenté sous Algobox.

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  h EST_DU_TYPE NOMBRE
DÉBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE h
  TANT_QUE (F1(a)*F1(a+h)>0) FAIRE
    DÉBUT_TANT_QUE
    a PREND_LA_VALEUR a+h
    FIN_TANT_QUE
  b PREND_LA_VALEUR a+h
  AFFICHER "La solution de f(x)=0
  est comprise entre"
  AFFICHER a
  AFFICHER "et"
  AFFICHER b
FIN ALGORITHME

fonction numérique utilisée :
F1(x)=POW(x,3)-2
```

Cet algorithme trouve ses limites lorsque l'on souhaite déterminer un encadrement de la solution de petite amplitude.

On améliore alors la méthode de balayage.

Supposons que l'on souhaite déterminer un encadrement d'amplitude $10^{-5}$ de la solution $\ell$ de $f(x)=0$.
On commence par encadrer, par balayage, la solution à l'entier près, c'est-à-dire en choisissant un pas égal à 1. On obtient $1 < \ell < 2$.

| X | Y1 |
|---|---|
| 0 | -2 |
| 1 | -1 |
| 2 | 6 |
| 3 | 25 |
| 4 | 62 |
| 5 | 123 |
| 6 | 214 |

Y1=X^3-2

On recommence alors le procédé en choisissant une valeur de départ égal à 1 et un pas égal à 0,1. On obtient $1,2 < \ell < 1,3$.

| X | Y1 |
|---|---|
| 1 | -1 |
| 1.1 | -.669 |
| 1.2 | -.272 |
| 1.3 | .197 |
| 1.4 | .744 |
| 1.5 | 1.375 |
| 1.6 | 2.096 |

Y1=X^3-2

On poursuit l'algorithme en divisant le pas par 10 à chaque étape et en choisissant comme nouvelle valeur de départ, la borne inférieure de l'encadrement obtenu à l'étape précédente.

| X | Y1 |
|---|---|
| 1.23 | -.1391 |
| 1.24 | -.0934 |
| 1.25 | -.0469 |
| 1.26 | 3.8E-4 |
| 1.27 | .04838 |
| 1.28 | .09715 |
| 1.29 | .14669 |

Y1=X^3-2

| X | Y1 |
|---|---|
| 1.257 | -.0139 |
| 1.258 | -.0091 |
| 1.259 | -.0044 |
| 1.26 | 3.8E-4 |
| 1.261 | .00514 |
| 1.262 | .00992 |
| 1.263 | .0147 |

Y1=X^3-2

| X | Y1 |
|---|---|
| 1.2597 | -.0011 |
| 1.2598 | -6E-4 |
| 1.2599 | -1E-4 |
| 1.26 | 3.8E-4 |
| 1.2601 | 8.5E-4 |
| 1.2602 | .00133 |
| 1.2603 | .00181 |

Y1=X^3-2

| X | Y1 |
|---|---|
| 1.2599 | -1E-4 |
| 1.2599 | -5E-5 |
| 1.2599 | -5E-6 |
| 1.2599 | 4.3E-5 |
| 1.2599 | 9E-5 |
| 1.26 | 1.4E-4 |
| 1.26 | 1.9E-4 |

X=1.25992

On obtient finalement $1,25992 < \ell < 1,25993$ et, les arguments qui permettent de justifier cet encadrement et qui sont à noter lors de la rédaction sont

$$f(1,25992) \approx -5.10^{-6} < 0 \text{ et } f(1,25993) \approx 4.10^{-5} > 0.$$

On peut noter que cet algorithme de balayage est beaucoup plus efficace que le précédent.

En effet, si on souhaite obtenir un encadrement d'amplitude $10^{-5}$ de la solution en partant d'un encadrement à l'entier, il faut au maximum $10^5$ étapes avec l'algorithme de balayage initial alors qu'il ne faut plus que 50 étapes avec celui-ci.

On donne ci-contre une version de ce deuxième algorithme de balayage implémenté sous Algobox.

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  amplitude EST_DU_TYPE NOMBRE
  h EST_DU_TYPE NOMBRE
DÉBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE amplitude
  h PREND_LA_VALEUR 1
  TANT_QUE (h>=amplitude) FAIRE
    DÉBUT_TANT_QUE
    TANT_QUE (F1(a)*F1(a+h)>0) FAIRE
      DÉBUT_TANT_QUE
      a PREND_LA_VALEUR a+h
      FIN_TANT_QUE
    h PREND_LA_VALEUR h/10
    FIN_TANT_QUE
  b PREND_LA_VALEUR a+amplitude
  AFFICHER "La solution de f(x)=0
  est comprise entre"
  AFFICHER a
  AFFICHER "et"
  AFFICHER b
FIN ALGORITHME

fonction numérique utilisée :
F1(x)=POW(x,3)-2
```

### *Encadrement de solution de l'équation $f(x)=0$ par dichotomie*

Le mot dichotomie vient du grec ancien διχοτομια composé de διχα signifiant « en deux » et de τομια signifiant « coupure ».

## Le principe

On détermine un intervalle $[a\,;\,b]$ contenant la solution $\ell$ de l'équation $f(x) = 0$ ;

on calcule alors le centre $c$ de l'intervalle $[a\,;\,b]$ puis, parmi les intervalles $[a\,;\,c]$ ou $[c\,;\,b]$, on détermine celui auquel appartient la solution $\ell$ de l'équation $f(x) = 0$ ;

on recommence alors le procédé en faisant jouer à $c$ le rôle de $a$ ou de $b$ selon l'intervalle retenu et ainsi de suite jusqu'à obtenir la précision demandée.

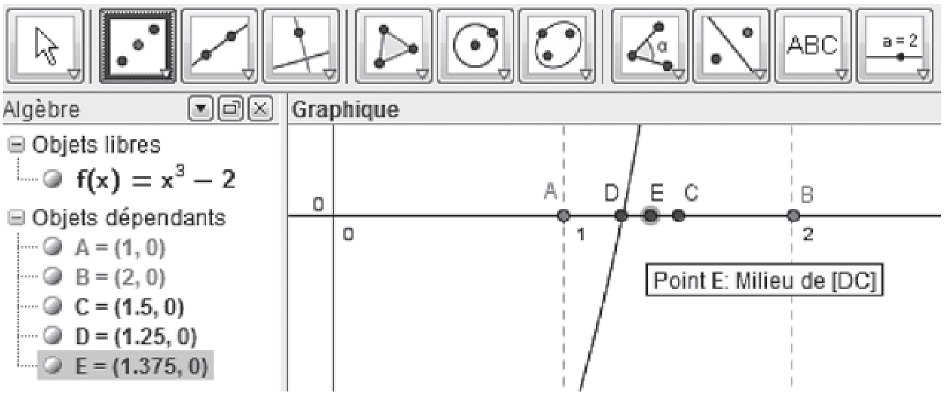
La démarche algorithmique d'un point de vue graphique peut être visualisée aisément à l'aide de GeoGebra.

Pour cela, on constuit la courbe représentant la fonction $f$ définie par $f(x) = x^3 - 2$.

On repère un intervalle quelconque $[a\,;\,b]$ contenant la solution $\ell$ de l'équation $f(x)=0$ et on place les points A($a$ ; 0) et B($b$ ; 0). Ainsi, on peut choisir par exemple $a=1$ et $b=2$.

On construit alors le milieu C du segment [AB] et on repère parmi les segments [AC] ou [CB] celui qui correspond à l'intervalle auquel appartient la solution $\ell$ de l'équation $f(x)=0$.

On recommence le procédé en faisant jouer à C, le rôle de A ou de B selon l'intervalle retenu et ainsi de suite.




Au fur et à mesure des itérations, le segment que coupe la courbe est de plus en plus petit autrement dit, l'intervalle auquel appartient $\ell$ a une amplitude de plus en plus petite.

Lorsque l'on travaille par dichotomie, il est nécessaire d'effectuer un test pour vérifier si la solution $\ell$ de l'équation $f(x)=0$ se situe dans l'intervalle $[a\,;\,c]$ ou dans l'intervalle $[a\,;\,c]$.

Pour cela, on raisonne comme dans la méthode par balayage. En effet, on doit vérifier si 0 est entre $f(a)$ et $f(c)$ ou si 0 est entre $f(c)$ et $f(b)$, il est donc nécessaire de vérifier si $f(a)$ et $f(c)$ sont de signes contraires ou pas. Il suffit alors de calculer le produit $f(a)\times f(c)$ et de choisir le bon intervalle selon que ce produit est positif ou pas.

On poursuit le procédé tant que la longueur de l'intervalle sur lequel on travaille est supérieure à l'amplitude souhaité pour l'encadrement.

On donne ci-contre un algorithme permettant d'encadrer une solution de l'équation $f(x)=0$ par dichotomie implémenté sous Algobox.

En testant cet algorithme avec $a=1$, $b=2$ et une amplitude de $10^{-5}$, il renvoie en sortie « La solution de $f(x)=0$ est comprise entre 1,2599182 et 1,2599258 ».

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  amplitude EST_DU_TYPE NOMBRE
  centre EST_DU_TYPE NOMBRE
DÉBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE amplitude
  TANT_QUE (b-a>=amplitude) FAIRE
    DÉBUT_TANT_QUE
    centre PREND_LA_VALEUR (a+b)/2
    SI (F1(a)*F1(centre)>=0) ALORS
      DÉBUT_SI
      a PREND_LA_VALEUR centre
      FIN_SI
      SINON
        DÉBUT_SINON
        b PREND_LA_VALEUR centre
        FIN_SINON
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER "La solution de f(x)=0
  est comprise entre"
  AFFICHER a
  AFFICHER "et"
  AFFICHER b
FIN ALGORITHME

fonction numérique utilisée :
F1(x)=POW(x,3)-2
```

On peut noter que cet algorithme est plus efficace que les algorithmes par balayage.

En effet, on remarque que par dichotomie, la longueur de l'intervalle sur lequel on travaille est divisée par 2 à chaque étape. Ainsi, si l'intervalle de départ à pour longueur 1, on obtient un encadrement d'amplitude $\frac{1}{2}$ après une étape, d'amplitude $\frac{1}{4}$ après 2 étapes et, plus généralement, on obtient un encadrement d'amplitude $\frac{1}{2^n}$ après $n$ étapes.

Si on souhaite obtenir un encadrement d'amplitude $10^{-5}$ de la solution en partant d'un encadrement à l'entier, il faut donc un nombre maximum $n$ d'étapes tel que $\frac{1}{2^n}\leq 10^{-5}$ ou encore $2^n \geq 10^5$ or la suite de terme général $2^n$ est croissante, $2^{16}<10^5$ et $2^{17}>10^5$ donc le nombre maximum d'étapes est dans ce cas de 17.

# D Exercices d'apprentissage

## Exercice 9 *Continuité*

Soit $f$ la fonction définie sur $\left]-2\,;\,2\right]$ par $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{4-x^2}}$ si $x\neq 2$ et $f(2)=m$.

Trouver $m$ pour que $f$ soit continue en 2.

## Exercice 10 *Vrai/ Faux/ on ne sait pas*

On suppose que la fonction $f$ est définie et dérivable sur $\left]-\infty\,;\,7\right]$ et qu'elle admet le tableau de variations suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $5$ | | $7$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f$ | 1 | ↘ | | ↗ | 3 | ↘ | |
| | | | $-4$ | | | | $-5$ |

On rappelle que les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie sur chaque intervalle.

Les assertions suivantes sont-elles vraies, fausses ou incertaines ?

| | V | F | ? |
|---|---|---|---|
| ❶ La fonction $f$ est continue sur $\left]-\infty\,;\,7\right]$ | | | |
| ❷ On a $f(0)<f(4)$ | | | |
| ❸ On a $f(-5)<f(7)$ | | | |
| ❹ On a $f(-5)>f(-4)$ | | | |
| ❺ L'équation $f(x)=1$ admet exactement trois solutions dans l'intervalle $\left]-\infty\,;\,7\right]$ | | | |
| ❻ Pour tout $x\in\left]-1\,;\,5\right[$, $f'(x)>0$ | | | |
| ❼ La fonction $f$ est strictement croissante sur $\left[-1\,;\,5\right]$ | | | |
| ❽ Pour tout $x\in\left[5\,;\,7\right]$, $f'(x)<0$ | | | |
| ❾ La dérivée $f'$ peut s'annuler en 0 | | | |
| ❿ La courbe $\mathscr{C}_f$ admet au moins deux tangentes horizontales | | | |

## Exercice 11 *Théorème des Valeurs Intermédiaires*

Montrer que l'équation $\cos x = x - 1$ admet une unique solution réelle puis en donner un encadrement d'amplitude $10^{-3}$.

## Exercice 12 *T.V.I.*

Soit $f$ la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x) = x\left(\cos^2 x - 0{,}99\right)$.

Déterminer le nombre de solutions sur $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ de l'équation $f(x) = 0$ puis proposer une fenêtre possible pour visualiser les résultats sur un écran de la calculatrice (répondre en donnant les valeurs de Xmin, Xmax, Ymin et Ymax).

▶ *Indication* Pour étudier les variations de $f$, on sera amené à étudier le signe de sa dérivée $f'$. Pour cela, on pourra montrer que $f''(x) = -2\sin(2x) - 2x\cos(2x)$ puis que $f'' > 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\,0\right[$ alors que $f'' < 0$ sur $\left]0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ de façon à démontrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet deux solutions sur $\left[-\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ puis en déduire le signe de $f'$.

## Exercice 13 *Étude fonction*

On s'intéresse aux solutions sur $D = \left]0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[ \cup \left]\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right[$ de l'équation $\frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = 8$ (E).

❶ Démontrer que, sur l'ensemble $D$, l'équation (E) équivaut à $8\sin x - \tan x = 1$.

❷ On considère la fonction $f$ définie sur l'ensemble $D$ par $f(x) = 8\sin x - \tan x$.

a) Démontrer que, pour tout $x \in D$, $f'(x)$ est du signe de $8\cos^3 x - 1$.

b) Résoudre sur $D$, l'inéquation $\cos x > \frac{1}{2}$, en déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de $f$ sur $D$.

c) Étudier les limites de $f$ au voisinage de $\frac{\pi}{2}$ puis dresser le tableau des variations de $f$ sur $D$.

❸ Déduire de ce qui précède, par simple lecture du tableau, le nombre de solutions sur $D$ de l'équation (E) en précisant les intervalles auxquels elles appartiennent.

## Exercice 14 *Suite et fonction*

Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 \in ]0;1[$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = u_n(1-u_n).$$

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in ]0;1[$, que la suite $(u_n)$ est décroissante puis qu'elle converge vers un réel que l'on déterminera.

## Exercice 15 *Suite, trigonométrie et T.V.I.*

1. Étudier les variations de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sin x$ ainsi que ses limites en $-\infty$ et en $+\infty$ puis tracer sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $E_n$ l'équation $f(x) = n$.

   a) Montrer que $E_n$ admet une unique solution réelle que l'on notera $x_n$.

   b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x_n}{n}$.

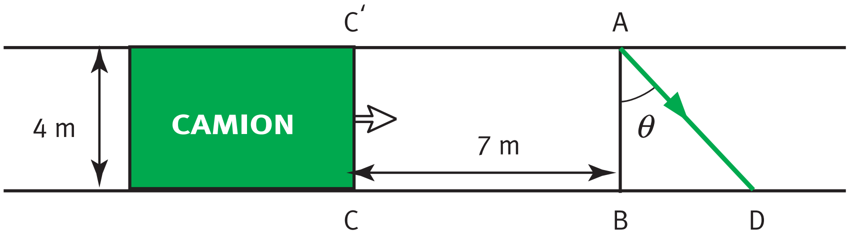
## Exercice 16 *BAC nouvelle calédonie* 2005

Un lapin désire traverser une route de 4 mètres de largeur. Un camion, occupant toute la route, arrive à sa rencontre à la vitesse de 60 km.h$^{-1}$. Le lapin décide au dernier moment de traverser, alors que le camion n'est plus qu'à 7 mètres de lui. Son démarrage est foudroyant et on suppose qu'il effectue la traversée en ligne droite au maximum de ses possibilités, c'est-à-dire à… 30 km.h$^{-1}$ !

L'avant du camion est représenté par le segment [CC′] sur le schéma ci-dessous.

Le lapin part du point A en direction de D.

Cette direction est repérée par l'angle $\theta = \widehat{BAD}$ avec $0 \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ (en radians).




1. Déterminer les distances AD et CD en fonction de $\theta$ et les temps $t_1$ et $t_2$ mis par le lapin et le camion pour parcourir respectivement les distances AD et CD.
2. On pose $f(\theta) = \dfrac{7}{2} + 2\tan\theta - \dfrac{4}{\cos\theta}$.

   Montrer que le lapin aura traversé la route avant le passage du camion si et seulement si $f(\theta) > 0$.
3. Conclure.

▸ Rappel *La fonction* $x \mapsto \tan x$ *est dérivable sur* $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ *et a pour dérivée la fonction* $x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

# 5 Dérivations et applications

## A Objectifs du chapitre

On présente dans ce chapitre un prolongement du travail fait en première sur la dérivation et rappelé dans les prérequis de cette séquence. L'objectif est de dériver des fonctions composées.

## B Pour débuter

■ **Activité 8** L'objectif de cette activité est d'introduire un théorème de dérivation de fonctions composées.

❶ a) Soit $g$ la fonction définie sur $\left[-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$ par $g(x)=\sqrt{3x+1}$.

En calculant la limite du taux d'accroissement $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ lorsque $h$ tend vers 0, déterminer le nombre dérivé de $g$ en $x$ où $x$ est réel strictement supérieur à $-\frac{1}{3}$.

b) On généralise le problème en considérant la fonction $g$ définie pour $x$ tel que $ax+b\geq 0$ et $a>0$ par $g(x)=\sqrt{ax+b}$.

Adapter les calculs précédents pour déterminer le nombre dérivé de $g$ en $x$ où $x$ est réel tel que $ax+b>0$.

❷ Soit $g$ la composée de la fonction affine $u$ définie par $u(x)=ax+b$ et de la fonction $f$ la fonction définie par $f(x)=x^3$.

Ainsi, $g$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(ax+b)^3$.

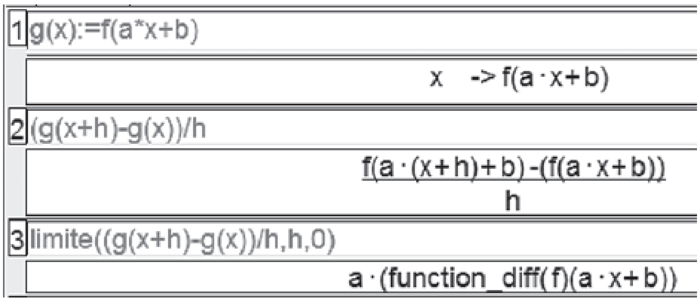
```
1 g(x):=(a*x+b)^3
```
$$x \;\to (a\cdot x+b)^3$$
```
2 (g(x+h)-g(x))/h
```
$$\frac{(a\cdot(x+h)+b)^3-(a\cdot x+b)^3}{h}$$
```
3 simplifier((g(x+h)-g(x))/h)
```
$$a^3\cdot h^2+3\cdot a^3\cdot h\cdot x+3\cdot a^3\cdot x^2+3\cdot a^2\cdot b\cdot h+6\cdot a^2\cdot b\cdot x+3\cdot a\cdot b^2$$
```
4 limite((g(x+h)-g(x))/h,h,0)
```
$$3\cdot a^3\cdot x^2+6\cdot a^2\cdot b\cdot x+3\cdot a\cdot b^2$$
```
5 factoriser(limite((g(x+h)-g(x))/h,h,0))
```
$$3\cdot a\cdot(x\cdot a+b)^2$$

L'objectif est de calculer la dérivée de la fonction $g$.

On dispose ci-contre d'une copie d'écran des calculs obtenus à l'aide du logiciel Xcas, un logiciel de calcul formel.

a) Expliquer la démarche suivie.

b) Exprimer $g'(x)$ à l'aide de la dérivée $f'$ de $f$.




❸ Soit $g$ la composée de la fonction affine $u$ définie par $u(x)=ax+b$ et d'une fonction $f$ dérivable.

Analyser et commenter la copie d'écran obtenue ci-contre.

Quelle formule de dérivation semble-t-on pouvoir établir ?

# C Cours

## 1. Cas de la composée d'une fonction affine par une fonction *f*

**Théorème 3**

Soit $g$ la fonction définie sur un intervalle I par $g(x) = f(ax+b)$.

On suppose donc que pour $x \in \mathrm{I}$, $ax+b \in \mathrm{J}$ et que $f$ est définie sur J.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I} \arrow[r, "u"] & \mathrm{J} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r, mapsto] \arrow[rr, bend right, "g=f\circ u"'] & u(x)=ax+b \arrow[r, mapsto] & g(x)=f(ax+b)=f(u(x)) \end{tikzcd}$$

Si $f$ est dérivable en $ax+b$ alors $g$ est dérivable en $x$ et on a

$$g'(x)=af'(ax+b).$$

### Démonstration

Soient $x\in \mathrm{I}$ tel que $f$ est dérivable en $ax+b$ et $h$ un réel non nul tel que $x+h\in \mathrm{I}$.

On cherche la limite de $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}$ lorsque $h$ tend vers 0.

On a $\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=\dfrac{f(a(x+h)+b)-f(ax+b)}{h}=\dfrac{f(ax+b+ah)-f(ax+b)}{h}$.

$$=a\frac{f(ax+b+ah)-f(ax+b)}{ah}$$

On a $\lim\limits_{h\to 0} ah=0$ donc, par composition en posant $H=ah$, on a

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(ax+b+ah)-f(ax+b)}{ah}=\lim_{H\to 0}\frac{f(ax+b+H)-f(ax+b)}{H}$$

or, $f$ est dérivable en $ax+b$, ce qui signifie que $\lim\limits_{H\to 0}\dfrac{f(ax+b+H)-f(ax+b)}{H}$ existe, est finie et vaut $f'(ax+b)$ donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(ax+b+ah)-f(ax+b)}{ah}=f'(ax+b)$

Finalement, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}=af'(ax+b)$.

Donc $g$ est dérivable en $x$ et on a $g'(x)=af'(ax+b)$.

▶ Exemples 8

Justifier la dérivabilité, calculer la dérivée puis étudier le sens de variations de chacune des fonctions dont l'expression est donnée ci-dessous :

**a)** $f(x)=\sqrt{4x-1}$ sur $\left[\dfrac{1}{4}\ ;+\infty\right[$ ; **b)** $g(x)=\sin(3x)$ sur $[0\ ;\pi]$ ;

**c)** $h(x)=(5x-1)^{200}$ sur $\mathbb{R}$.

▶ **Solutions**

**a)** La fonction $f$ est la composée de $x\mapsto 4x-1$ par $x\mapsto\sqrt{x}$ or la fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\ ;+\infty[$ et la fonction $x\mapsto 4x-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est à valeurs strictement positives sur $\left]\dfrac{1}{4}\ ;+\infty\right[$ donc, par composition, $f$ est dérivable sur $\left]\dfrac{1}{4}\ ;+\infty\right[$. Par le théorème ci-dessus, on obtient que pour tout $x>\dfrac{1}{4}$, $f'(x)=4\times\dfrac{1}{2\sqrt{4x-1}}$ d'où $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{4x-1}}$.

Pour tout $x>\dfrac{1}{4}$, $\sqrt{4x-1}>0$ et $2>0$ donc par quotient, $f'(x)>0$ sur $\left]\dfrac{1}{4}\ ;+\infty\right[$ et $f$ est strictement croissante sur $\left[\dfrac{1}{4}\ ;+\infty\right[$.

**b)** La fonction $g$ est la composée de $x\mapsto 3x$ suivie de $x\mapsto\sin x$ or cette dernière est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x\mapsto 3x$ est dérivable sur $[0\ ;\pi]$ et à valeurs réelles donc $g$ est dérivable sur $[0\ ;\pi]$.

Pour tout $x\in[0\ ;\pi]$, $g'(x)=3\cos(3x)$. Comme $3>0$, $g'(x)$ est du signe de $\cos(3x)$.

Sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\cos(3x)=0\Leftrightarrow 3x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ où } k\in\mathbb{Z} \text{ ou } 3x=\frac{\pi}{2}+2k'\pi \text{ où } k'\in\mathbb{Z}$$

ce qui équivaut à $x=-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k\pi}{3}$ où $k\in\mathbb{Z}$ ou $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2k'\pi}{3}$ où $k'\in\mathbb{Z}$.

Ainsi sur $[0\ ;\pi]$, $\cos(3x)=0$ a trois solutions qui sont $\dfrac{\pi}{6}$, $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{5\pi}{6}$ que l'on obtient respectivement pour $k'=0$, $k=1$ et $k'=1$.

Si $0 \leq x < \frac{\pi}{6}$ alors $0 \leq 3x < \frac{\pi}{2}$ puis $\cos(3x) > 0$, si $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$ alors $\frac{\pi}{2} < 3x < \frac{3\pi}{2}$ puis $\cos(3x) < 0$, si $\frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$ alors $\frac{3\pi}{2} < 3x < \frac{5\pi}{2}$ puis $\cos(3x) > 0$ et enfin si $\frac{5\pi}{6} < x \leq \pi$ alors $\frac{5\pi}{2} < 3x < 3\pi$ puis $\cos(3x) < 0$. Ainsi, $f'$ est successivement strictement positive sur les intervalles $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{6}\right[$ et $\left]\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\right[$ puis strictement négative sur les intervalles $\left]\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{2}\right[$ et $\left]\frac{5\pi}{6}\ ;\ \pi\right]$. On peut en déduire que $f$ est strictement croissante sur $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{6}\right]$ et sur $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{5\pi}{6}\right]$ et qu'elle est strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{5\pi}{6}\ ;\ \pi\right]$.

**c)** La fonction $h$ est une fonction polynomiale dont elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. L'expression de $h$ est donnée sous la forme de la composée de la fonction affine $x \mapsto 5x-1$ par la fonction $x \mapsto x^{200}$ donc, pour déterminer la dérivée $f'$ de $f$, on utilise le théorème de dérivation des fonctions composées.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5 \times 200(5x-1)^{199}$ soit $f'(x) = 1000(5x-1)^{199}$. Comme $1000 > 0$ et $(5x-1)^{199}$ est du signe de $5x-1$, on en déduit que $f'(x)$ est du signe de $5x-1$. Par suite, $f'(x) < 0$ sur $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{5}\right[$ et $f'(x) > 0$ sur $\left]\frac{1}{5}\ ;\ +\infty\right[$ et $f$ est strictement décroissante sur $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{5}\right]$ puis strictement croissante sur $\left[\frac{1}{5}\ ;\ +\infty\right[$.

▶ Exemple 9

Calculer la limite de $\dfrac{\sqrt{4x-1}-\sqrt{3}}{x-1}$ lorsque $x$ tend vers 1.

▶ *Indication*

On remarquera que $\dfrac{\sqrt{4x-1}-\sqrt{3}}{x-1}$ s'écrit sous la forme $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ où $f$ est une fonction à préciser.

▶ **Solutions**

On remarque que le quotient $\dfrac{\sqrt{4x-1}-\sqrt{3}}{x-1}$ est le taux d'accroissement de la fonction $f$ définie par $f(x) = \sqrt{4x-1}$ entre les réels 1 et $x$. En effet, on a

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{4x-1}-\sqrt{3}}{x-1}.$$

On a $\lim\limits_{x\to 1} x-1=0$ donc, par composition avec $h=x-1$,

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

et, lorsque $f$ est dérivable en 1, on a $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$ ainsi lorsque $f$ est dérivable en 1, on a $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$.

On a montré au **a)** de l'exemple précédent que $f$ est dérivable en 1 et que $f'(1)=\dfrac{2}{\sqrt{4\times 1-1}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ donc on obtient que $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{4x-1}-\sqrt{3}}{x-1}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

***Remarque*** La limite demandée peut aussi s'obtenir en multipliant numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée du numérateur.

▶ Exemple 10 Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\cos(\omega t+\varphi)$ où $\omega$ et $\varphi$ sont des constantes réelles.

En calculant la dérivée seconde $f''$ de $f$, démontrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a

$$f''(t)+\omega^2 f(t)=0.$$

▶ **Solution** La fonction $f$ est la composée de la fonction affine $t\mapsto \omega t+\varphi$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par la fonction cosinus dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f'(t)=\omega\times(-\sin(\omega t+\varphi))=-\omega\sin(\omega t+\varphi)$.

Puis, la fonction $f'$ est le produit de la constante réelle $-\omega$ par la composée de $t\mapsto \omega t+\varphi$ suivie de la fonction sinus. Ainsi $f'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$f''(t)=-\omega\times\omega\cos(\omega t+\varphi)=-\omega^2\cos(\omega t+\varphi)=-\omega^2 f(t).$$

On peut en déduire que pour tout $t\in\mathbb{R}$, on a $f''(t)+\omega^2 f(t)=0$.

▶▶

## 2. Cas de la composée d'une fonction $u$ par quelques fonctions usuelles

**Propriété 24**

Soit $u$ est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

| fonction $g$ | fonction dérivée $g'$ | Remarques éventuelles |
|---|---|---|
| $u^2$ | $2u'u$ | |
| $u^n$ où $n \in \mathbb{Z}$ | $nu'u^{n-1}$ | $u$ ne s'annule pas sur I si $n<0$ |
| $\frac{1}{u^n}$ où $n \in \mathbb{N}$ | $-\frac{nu'}{u^{n+1}}$ | $u$ ne s'annule pas sur I |
| $\frac{1}{u}$ | $-\frac{u'}{u^2}$ | $u$ ne s'annule pas sur I |
| $\sqrt{u}$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $u$ est strictement positive sur I |

*Remarque* On notera que l'on retrouve les résultats démontrés précédemment lorsque la fonction $u$ est affine puisque dans ce cas $u(x)=ax+b$ et $u'(x)=a$. Par exemple, lorsque $g(x)=\sqrt{u(x)}$ avec $u(x)=ax+b$, on a établit que $g'(x)=\frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$ ce qui correspond bien à la formule donnée ici $g'(x)=\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

### *Démonstration*

- Démontrons que, si $u$ est une fonction dérivable sur un intervalle I et $n$ un entier relatif alors la composée $u^n$ est dérivable sur I et pour tout $x \in$ I,

$$\left(u^n\right)'(x)=nu'(x)u^{n-1}(x).$$

Nous allons proposer deux méthodes.

### *Première méthode (par récurrence)*

Cette première méthode est classique pour démontrer qu'une propriété est vraie pour tout entier relatif $n$ : on commence par démontrer la propriété par récurrence pour tout entier naturel $n$ puis on traite le cas où $n$ est un entier négatif.
Démontrons ainsi dans un premier temps le résultat pour tout entier naturel $n$.
Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle I.

Pour $n = 0$, $u^0 = 1$ ce qui signifie que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $u^0(x) = 1$ alors $u^0$ est dérivable sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$, $(u^0)'(x) = 0$ donc la propriété est bien vérifiée.

On peut vérifier que la propriété est vraie au rang $n = 1$ ou encore au rang $n = 2$ en remarquant dans ce dernier cas que la fonction $u^2$ peut s'écrire comme le produit de $u$ par $u$ (c'est ici le premier résultat énoncé dans le tableau).

Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $u^k$ est dérivable sur I et que pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$(u^k)'(x) = ku'(x)u^{k-1}(x).$$

La fonction $u^{k+1}$ est alors dérivable sur I comme produit des fonctions $u^k$ et $u$ toutes les deux dérivables sur I puis, pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$\begin{aligned}(u^{k+1})'(x) &= (u^k \times u)'(x) = ku'(x)u^{k-1}(x) \times u(x) + u^k(x) \times u'(x)\\ &= ku'(x)u^k(x) + u^k(x) \times u'(x) = (k+1)u'(x)u^k(x).\end{aligned}$$

La propriété est donc héréditaire et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u^n$ est dérivable sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$, $(u^n)'(x) = nu'(x)u^{n-1}(x)$.

Supposons désormais que $n < 0$.

Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle I et ne s'annulant pas sur I. La fonction $u^n$ s'écrit alors $u^n = \dfrac{1}{u^{-n}} = \dfrac{1}{u^m}$ en posant $m = -n$. On remarque d'une part que $m = -n > 0$ donc le résultat démontré ci-dessus est applicable c'est-à-dire que $u^m$ est dérivable sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\left(u^m\right)'(x) = mu'(x)u^{m-1}(x)$ et, d'autre part la fonction $\dfrac{1}{u^m}$ est alors dérivable sur I comme inverse de la fonction $u^m$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$(u^n)'(x) = \left(\frac{1}{u^m}\right)'(x) = -\frac{(u^m)'(x)}{(u^m)^2(x)} = -\frac{mu'(x)u^{m-1}(x)}{u^{2m}(x)} = -mu'(x)u^{-m-1}(x).$$

On remarque ici que l'on a démontré au passage le troisième résultat du tableau qui est un cas particulier du deuxième. Enfin, comme $m = -n$, on obtient que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $(u^n)'(x) = nu'(x)u^{n-1}(x)$.

Finalement, si $u$ est une fonction dérivable sur un intervalle I et $n$ un entier relatif alors la composée $u^n$ est dérivable sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$(u^n)'(x) = nu'(x)u^{n-1}(x)$$

avec l'hypothèse supplémentaire que $u$ ne s'annule pas sur I si $n < 0$.

### *Deuxième méthode*
### *(en utilisant la définition de la dérivabilité en un réel)*

La démarche suivante est valable pour $n \in \mathbb{Z}$ si ce n'est que dans le cas où $n < 0$, il est nécessaire de préciser que $u$ ne s'annule pas sur I.

On suppose en outre que $u(x+h)-u(x)$ ne s'annule pas lorsque $h$ est proche de 0.

On reviendra sur cette difficulté à la fin du chapitre.

Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle I.

Soient $x \in \mathrm{I}$ et $h$ un réel non nul tel que $x+h \in \mathrm{I}$ alors :

$$\begin{aligned}\frac{u^n(x+h)-u^n(x)}{h} &= \frac{u^n(x+h)-u^n(x)}{u(x+h)-u(x)} \times \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \\ &= \frac{(u(x+h))^n-(u(x))^n}{u(x+h)-u(x)} \times \frac{u(x+h)-u(x)}{h}.\end{aligned}$$

D'une part, $u$ est dérivable sur un intervalle I donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} = u'(x)$.

D'autre part, on remarque que $u$ étant dérivable en $x$, elle est continue en $x$ et

$$\lim_{h \to 0} u(x+h) = u(x) \text{ ou encore } \lim_{h \to 0} u(x+h)-u(x) = 0.$$

En posant $H = u(x+h) - u(x)$, on obtient $u(x+h) = u(x)+H$ avec $H$ tendant vers 0 lorsque $h$ tend vers 0 puis

$$\lim_{h \to 0} \frac{(u(x+h))^n-(u(x))^n}{u(x+h)-u(x)} = \lim_{H \to 0} \frac{(u(x)+H)^n-(u(x))^n}{H} = n(u(x))^{n-1}$$

car, de la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction $X \mapsto X^n$, on déduit que pour tout $X \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{H \to 0} \frac{(X+H)^n-X^n}{H} = nX^{n-1}.$$

Finalement par produit,

$$\lim_{h \to 0} \frac{u^n(x+h)-u^n(x)}{h} = n(u(x))^{n-1} \times u'(x) = nu'(x)u^{n-1}(x)$$

et $u^n$ est dérivable sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$, $(u^n)'(x) = nu'(x)u^{n-1}(x)$.

- Démontrons que, si $u$ est une fonction dérivable et strictement positive sur I alors la composée $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$, $(\sqrt{u})'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

  Pour cela, on utilise la définition de la dérivabilité en un réel. Le raisonnement est analogue à celui suivi ci-dessus dans la deuxième méthode.

  Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle I et strictement positive sur I.

  On suppose comme précédemment que $u(x+h)-u(x)$ ne s'annule pas lorsque $h$ est proche de 0.

Soient $x \in \mathrm{I}$ et $h$ un réel non nul tel que $x+h \in \mathrm{I}$ alors

$$\frac{\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}}{h} = \frac{\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}}{u(x+h)-u(x)} \times \frac{u(x+h)-u(x)}{h}.$$

D'une part, $u$ est dérivable sur un intervalle I donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} = u'(x)$.

D'autre part, on remarque que $u$ étant dérivable en $x$, elle est continue en $x$ et $\lim\limits_{h \to 0} u(x+h) = u(x)$ ou encore $\lim\limits_{h \to 0} u(x+h)-u(x) = 0$.

En posant $H = u(x+h) - u(x)$, on obtient $u(x+h) = u(x)+H$ avec $H$ tendant vers 0 lorsque $h$ tend vers 0 puis $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}}{u(x+h)-u(x)} = \lim\limits_{H \to 0} \frac{\sqrt{u(x)+H}-\sqrt{u(x)}}{H} = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}$ car, de la dérivabilité sur $\left]0\,;\,+\infty\right[$ de la fonction $X \mapsto \sqrt{X}$, on déduit que pour tout $X > 0$,

$$\lim_{H \to 0} \frac{\sqrt{X+H}-\sqrt{X}}{H} = \frac{1}{2\sqrt{X}}.$$

Finalement par produit, $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sqrt{u(x+h)}-\sqrt{u(x)}}{h} = \frac{1}{2\sqrt{u(x)}} \times u'(x)$ et $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$, $\left(\sqrt{u}\right)'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

***Remarque*** On peut remarquer une similarité des résultats énoncés dans le tableau de dérivation ci-dessus.

En effet, dans le cas général, on peut noter la démonstration suivante concernant la dérivée d'une fonction composée $g = f \circ u$ qui suit exactement ce qui a été fait précédemment.

Soients $u$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle J tel que $u(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$.

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{I} \arrow[r] & \mathrm{J} \arrow[r] & \mathbb{R} \\
x \arrow[r, mapsto, "u"] \arrow[rr, bend right, "g = f \circ u"'] & u(x) \arrow[r, mapsto, "f"] & g(x) = f(u(x))
\end{tikzcd}$$

La fonction $g = f \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$g'(x) = \left(f \circ u\right)'(x) = u'(x) \times f'\left(u(x)\right).$$

Cette formule est une généralisation de celle démontrée précédemment dans le cas où $u$ est affine.

De ce résultat général, on peut déduire les dérivées de fonctions composées :

- si $u$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I alors la composée $\sin u$ est dérivable sur I et on a $(\sin u)' = u' \cos u$ ;
- si $u$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle I alors la composée $\cos u$ est dérivable sur I et on a $(\cos u)' = -u' \sin u$ ;
- si $u$ une fonction définie, dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans l'ensemble de définition de la fonction tangente alors la composée $\tan u$ est dérivable sur I et on a $(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1+\tan^2 u)$.

### *Démonstration*

Ci-dessous une démonstration de la formule générale de dérivation des fonctions composées dans le cas particulier où $u(x+h)-u(x)$ ne s'annule pas lorsque $h$ est proche de 0.
Cette démonstration est donnée à titre d'information. Elle est hors programme.

- Soient $x \in \mathrm{I}$ et $h$ un réel non nul tel que $x+h \in \mathrm{I}$ alors

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \frac{(f\circ u)(x+h)-(f\circ u)(x)}{h} = \frac{f(u(x+h))-f(u(x))}{u(x+h)-u(x)} \times \frac{u(x+h)-u(x)}{h}.$$

D'une part, $u$ est dérivable sur un intervalle I donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(x+h)-u(x)}{h} = u'(x)$.

D'autre part, on remarque que $u$ étant dérivable en $x$, elle est continue en $x$ et $\lim\limits_{h\to 0} u(x+h) = u(x)$ ou encore $\lim\limits_{h\to 0} u(x+h)-u(x) = 0$. En posant $H = u(x+h)-u(x)$, on obtient $u(x+h) = u(x)+H$ avec $H$ tendant vers 0 lorsque $h$ tend vers 0 puis $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(u(x+h))-f(u(x))}{u(x+h)-u(x)} = \lim\limits_{H\to 0} \dfrac{f(u(x)+H)-f(u(x))}{H} = f'(u(x))$ car, de la dérivabilité sur J de la fonction $f$, on déduit que pour tout

$$X \in \mathrm{J},\ \lim_{H\to 0} \frac{f(X+H)-f(X)}{H} = f'(X).$$

Finalement par produit,

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(f\circ u)(x+h)-(f\circ u)(x)}{h} = f'(u(x)) \times u'(x)$$

et $g = f\circ u$ est dérivable sur $I$ et pour tout $X \in \mathrm{I}$,

$$g'(x) = \big(f\circ u\big)'(x) = u'(x) \times f'\big(u(x)\big).$$

**Remarque** ***au sujet des démonstrations ci-dessus :***

Les démonstrations précédentes nécessitent de supposer que $u(x+h)-u(x)$ ne s'annule pas lorsque $h$ est proche de 0. Pour aller plus loin, on pourra compléter cette démonstration par l'exercice proposé en approfondissement (AP).

▸ Exemple 11 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

**a)** $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x^3+x+1)^5$ ;

**b)** $g$ définie sur $[-1\,;\,1]$ par $g(x)=x\sqrt{1-x^2}$.

▸ **Solution** **a)** La fonction $f$ est une fonction polynomiale donc $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. L'expression de $f$ est donnée sous la forme de la composée de $x \mapsto x^3+x+1$ par $x \mapsto x^5$.

Formule utilisée : $\left(u^5\right)' = 5u'u^4$ où $u$ est la fonction définie par $u(x)=x^3+x+1$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=5\times(3x^2+1)\times(x^3+x+1)^4$.

On peut remarquer que, si l'objectif est d'étudier les variations de $f$, on a directement par cette forme le signe de $f'(x)$ puisque l'expression obtenue est le produit de facteurs tous positifs. La fonction $f$ est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

**b)** La fonction $g$ est le produit de $x \mapsto x$ par $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. La fonction affine $x \mapsto x$ est dérivable sur $[-1\,;\,1]$. La fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$. est la composée de $x \mapsto 1-x^2$ par $x \mapsto \sqrt{x}$ or cette dernière est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et $x \mapsto 1-x^2$ est dérivable sur $[-1\,;\,1]$ et à valeurs strictement positives sur $]-1;1[$ de sorte que la composée soit dérivable sur $]-1;1[$. Finalement, $g$ est dérivable sur $]-1;1[$.

Formules utilisées : $(uv)'=u'v+uv'$ et $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Pour tout $x \in ]-1;1[$, $g'(x)=1\times\sqrt{1-x^2}+x\times\dfrac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$ donc

$$g'(x)==\frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{\left(1-x\sqrt{2}\right)\left(1+x\sqrt{2}\right)}{\sqrt{1-x^2}}$$

On remarquera que cette dernière expression de $g'(x)$ permet de déterminer, rapidement si nécessaire, le signe de $g'(x)$ puisque le dénominateur est strictement positif sur $]-1;1[$ et que le numérateur est écrit comme le produit de deux expressions affines dont on sait étudier le signe.

▸ Exemple 12 Au cours de l'année, dans la séquence 9, on sera amené à utiliser la majoration suivante :

$$\text{pour tout } p \in [0\,;\,1],\ 1{,}96\sqrt{p(1-p)} \le 1.$$

Démontrer cette inégalité en étudiant les variations de la fonction $p \mapsto 1{,}96\sqrt{p(1-p)}$ définie sur [0 ; 1].

**▸ Solution** Notons $f$ la fonction définie sur $\left[0{,}1\right]$ par $f(p)=1{,}96\sqrt{p(1-p)}$. La fonction $f$ est le produit de la constante 1,96 par la composée de $p\mapsto p(1-p)$ suivie de $x\mapsto\sqrt{x}$. La fonction $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $\left]0\,;+\infty\right[$ et la fonction polynomiale $p\mapsto p(1-p)=p-p^2$ est dérivable sur $\left[0\,;1\right]$ à valeurs strictement positives sur $]0\,;\,1[$ donc par composition $p\mapsto\sqrt{p(1-p)}$ est dérivable sur $\left]0\,;1\right[$. Finalement, $f$ est dérivable sur $\left]0\,;1\right[$.

Formule utilisée : $(\sqrt{u})'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

Pour $p\in\left]0\,;1\right[$, $f'(p)=1{,}96\dfrac{1-2p}{2\sqrt{p-p^2}}$. Comme $1{,}96>0$ et $2\sqrt{p-p^2}>0$, $f'(p)$ est du signe de $1-2p$, à savoir strictement positif sur $\left]0\,;\,\dfrac{1}{2}\right[$, nul en $\dfrac{1}{2}$ et strictement négatif sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;\,1\right[$. Donc $f$ est croissante sur $\left[0\,;\,\dfrac{1}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{1}{2}\,;\,1\right]$. On déduit des variations de $f$ qu'elle admet un maximum en $\dfrac{1}{2}$, autrement dit pour tout $p\in\left[0\,;\,1\right]$, $f(p)\le f\left(\dfrac{1}{2}\right)$

or $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1{,}96\sqrt{\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{2})}=\dfrac{1{,}96}{2}=0{,}98$ et il en découle que pour tout $p\in\left[0\,;\,1\right]$,

$$f(p)\le 1,\ \text{c'est-à-dire } 1{,}96\sqrt{p(1-p)}\le 1.$$

# D Exercices d'apprentissage

## Exercice 17 *Calculs de dérivées*

Justifier la dérivabilité de $f$ sur l'intervalle I puis déterminer la dérivée de $f$ dans les cas suivants :

a) $f:x\mapsto\sqrt{4-x}$ sur $\mathrm{I}=\left]-\infty\,;\,4\right[$ ; b) $f:x\mapsto x^2\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ sur $\mathrm{I}=\mathbb{R}$ ;

c) $f:x\mapsto\dfrac{\sqrt{1+\sin x}}{x-1}$ sur $\mathrm{I}=[0\,;\,1[$.

## Exercice 18 *Fonction définie par morceaux*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=x^2-3 \text{ si } x\in\left]-\infty\,;\,1\right[ \\ f(1)=-2 \\ f(x)=\sqrt{x-1}-2 \text{ si } x\in\left]1\,;\,+\infty\right[. \end{cases}$

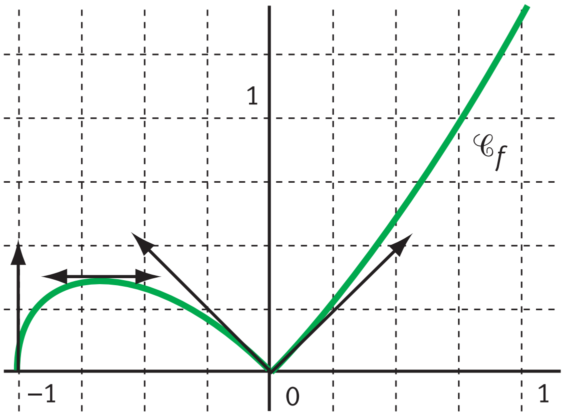
❶ La fonction $f$ est-elle continue en 1 ?

❷ La fonction $f$ est-elle dérivable en 1 ?

❸ Quelles conséquences graphiques peut-on tirer des résultats précédents ?

## Exercice 19 *Dérivabilité*

On dispose ci-dessous d'un extrait de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant la fonction $f$ définie sur $\left[-1\,;\,+\infty\right[$ par $f(x)=\sqrt{x^2(x+1)}$ .




❶ **a)** À l'aide du graphique, que peut-on conjecturer concernant la dérivabilité de $f$ en $-1$ et en 0 ?

**b)** Démontrer les conjectures.

❷ **a)** Démontrer que, lorsque $f$ est dérivable, $f'(x)$ est du signe de $3x^2+2x$ et en déduire les variations de $f$ sur $\left[-1\,;\,+\infty\right[$.

**b)** Calculer la limite de $f$ en $+\infty$ puis dresser le tableau des variations de $f$.

❸ **a)** À l'aide du tableau des variations de $f$, donner selon les valeurs du réel $k$ le nombre de solutions sur $\left[-1\,;\,+\infty\right[$ de l'équation $f(x)=k$.

**b)** À l'aide du graphique, donner selon les valeurs du réel $m$ le nombre de solutions sur $\left[-1\,;\,1\right]$ de l'équation $f(x)=mx$.

## Exercice 20 *Étude d'une fonction*

Soit $f$ la fonction définie sur un intervalle inclus dans $\left[-\pi\,;\,\pi\right]$ par $f(x)=\sqrt{2\cos x-1}$.

Préciser le domaine de définition, le domaine de dérivabilité, calculer la dérivée, étudier les variations de $f$ et tracer sa courbe représentative.

## Exercice 21 *Dérivée n-ième*

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin^2 x$.

Démontrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la dérivée *n-ième* de $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ par $f^{(n)}(x)=-2^{n-1}\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)$.

# 6 Synthèse

## A Synthèse de la séquence

### 1. Fonctions sinus et cosinus

**Définitions**

On appelle fonction cosinus la fonction qui à tout réel $x$ associe le réel cos $x$.

On appelle fonction sinus la fonction qui à tout réel $x$ associe le réel sin $x$.

**Propriétés**

- Les fonctions cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$.
- On sait que pour tout réel $x$, on a $\cos(-x)=\cos x$. On dit que la fonction cosinus est paire.

  Graphiquement, la fonction cosinus admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.
- On sait que pour tout réel $x$, on a $\sin(-x)=-\sin x$. On dit que la fonction sinus est impaire.

  Graphiquement, la fonction sinus admet l'origine du repère comme centre de symétrie.
- On sait que pour tout réel $x$, on a $\cos(x+2\pi)=\cos x$ et $\sin(x+2\pi)=\sin x$.

  En terme de fonctions, on dit que les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période $2\pi$.

  Graphiquement, dans le plan muni d'un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, les courbes représentant ces fonctions sont invariantes par translation de vecteur $2\pi\vec{i}$.
- La fonction sinus est dérivable en 0 et admet pour nombre dérivé 1 en 0.

  Autrement dit $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin h}{h}=1$.
- La fonction cosinus est dérivable en 0 et admet pour nombre dérivé 0 en 0.

  Autrement dit $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\cos h-1}{h}=0$.

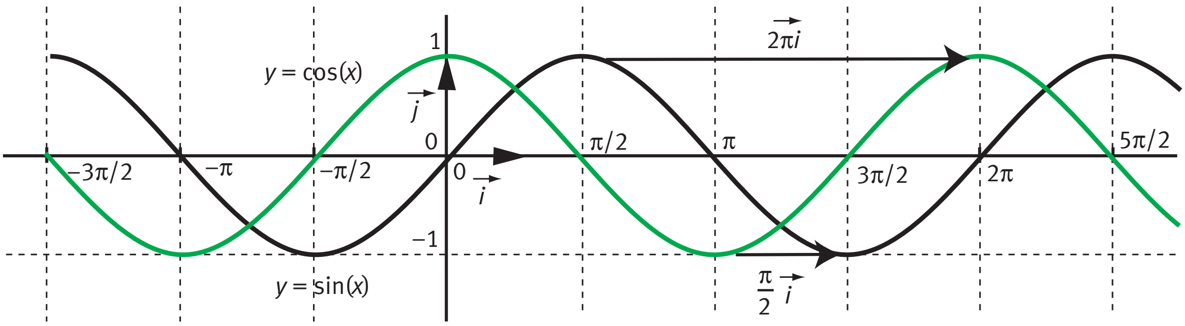
**Propriétés (suite et fin)**

- La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\sin)'(x) = \cos x$.
- La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\cos)'(x) = -\sin x$.
- 

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|
| Variations de la fonction sinus | $0$ ↗ | $1$ ↘ | $-1$ ↗ | $0$ |

| $x$ | $0$ | $\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|
| Variations de la fonction cosinus | $1$ ↘ | $-1$ ↗ | $1$ |

## Représentations graphiques




# 2. Limites de fonctions

**Définitions** *Limites en $+\infty$*

Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $]\alpha\,;\,+\infty[$.

- On dit que $f(x)$ tend vers $\ell$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle du type $]A\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ lorsque tout intervalle du type $]-\infty\,;A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment grand. On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

### Définitions — *Limites en $-\infty$*

Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $-\infty$, c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $\left]-\infty\,;\alpha\right[$.

- On dit que $f(x)$ tend vers $\ell$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ négatif, suffisamment grand en valeur absolue. On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle du type $\left]A\,;+\infty\right[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ négatif, suffisamment grand en valeur absolue. On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $-\infty$ lorsque tout intervalle du type $\left]-\infty\,;A\right[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ négatif, suffisamment grand en valeur absolue. On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

### Propriétés — *Limites de fonction usuelle en $+\infty$*

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty,\quad \lim_{x \to +\infty} x = +\infty,\quad \lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty,\quad \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$$

et plus généralement $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0,\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0,\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0,\quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

et plus généralement $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

### Propriétés — *Limites de fonction usuelle en $-\infty$*

$$\lim_{x \to -\infty} x = -\infty,\quad \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty,\quad \lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$$

et plus généralement $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = -\infty$ lorsque $k$ est un entier naturel impair et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^k = +\infty$ lorsque $k$ est un entier naturel pair non nul.

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0,\quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0,\quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

et plus généralement $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^k} = 0$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

**Définitions** *Limites en un réel, limite à gauche, limite à droite*

Soit $f$ une fonction définie sur un voisinage de $a$ sauf éventuellement en $a$.

- On dit que $f(x)$ tend vers $\ell$ lorsque $x$ tend vers $a$ lorsque tout intervalle ouvert contenant $\ell$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment proche de $a$. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $a$ lorsque tout intervalle du type $]A\,; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment proche de $a$. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
- On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $a$ lorsque tout intervalle du type $]-\infty\,; A[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour $x$ suffisamment proche de $a$. On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

**Propriétés** *Limites de fonction usuelle en un réel*

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$
- Pour $k$ entier naturel impair, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x^k} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x^k} = +\infty$.
- Pour $k$ est un entier naturel pair, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x^k} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \dfrac{1}{x^k} = -\infty$

  donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^k} = +\infty$.

## Illustration graphique *asymptotes*

Graphiquement, on observe qu'une droite est asymptote à une courbe lorsque la courbe se rapproche autant qu'on le veut de la droite.

**Définitions** *asymptote horizontale*

Soit $f$ une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ (ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ ).

La droite d'équation $y = L$ est dite droite asymptote à la courbe représentative de $f$ au voisinage de $+\infty$ (ou de $-\infty$ ).

*asymptote verticale*

Soit $f$ une fonction telle que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ (ou $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ ) où $a$ est un réel.

La droite d'équation $x = a$ est dite droite asymptote à la courbe représentative de $f$.

**Propriétés** *Somme*

- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\ell$ et si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\ell'$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x)=\ell+\ell'$.
- Dans le cas où l'une au moins des fonctions a une limite infinie en $\alpha$, les résultats sont donnés par le tableau suivant :

**La limite de la somme $f(x)+g(x)$**

| $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|
| $+\infty$ | $+\infty$ | |
| $-\infty$ | | $-\infty$ |
| $\ell$ | $+\infty$ | $-\infty$ |

**Propriétés** *Produit*

- Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\ell$ et si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=\ell'$ alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\times g(x)=\ell\times\ell'$.
- Dans le cas où l'une au moins des fonctions a une limite infinie en $\alpha$, les résultats sont donnés par le tableau suivant :

**La limite du produit $f(x)\times g(x)$**

| $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ \ $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
|---|---|---|
| $+\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| 0 | | |
| $\ell$ $(\ell>0)$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $\ell$ $(\ell<0)$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

**Propriété** *inversion*

| $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ | $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{1}{f(x)}$ |
|---|---|
| $+\infty$ | $0$ |
| $-\infty$ | $0$ |
| $\ell\ (\ell \neq 0)$ | $\dfrac{1}{\ell}$ |
| $0_+$ | $+\infty$ |
| $0_-$ | $-\infty$ |

**Propriété** *Quotient*

**La limite du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$**

| $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)$ / $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $0_+$ | $0_-$ | $\ell'$ $(\ell' > 0)$ | $\ell'$ $(\ell' > 0)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $+\infty$ | | | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | | | $-\infty$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $0$ | $0$ | $0$ | | | $0$ | |
| $\ell\ (\ell > 0)$ | $0$ | $0$ | $+\infty$ | $-\infty$ | $\dfrac{\ell}{\ell'}$ | |
| $\ell\ (\ell < 0)$ | | | $-\infty$ | $+\infty$ | | |

**Propriétés** ***Limites et inégalités : théorèmes de comparaison et compatibilité avec l'ordre***

| Si, pour $x$ au voisinage de $\alpha$ où $\alpha$ désigne un réel $a$ ou $+\infty$ ou $-\infty$ … | … et si … | … alors … |
|---|---|---|
| $f(x) \geq u(x)$ | $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = +\infty$ | $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$ |
| $f(x) \leq v(x)$ | $\lim\limits_{x \to \alpha} v(x) = -\infty$ | $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$ |
| $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ | $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} v(x) = L$ | $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = L$ (théorème des gendarmes) |
| $\lvert f(x) - L \rvert \leq u(x)$ | $\lim\limits_{x \to \alpha} u(x) = 0$ | $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = L$ |
| $f(x) < g(x)$ ou $f(x) \leq g(x)$ | $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = L'$ | $L \leq L'$ (compatibilité avec l'ordre) |

**Théorème**

***Limite d'une fonction composée***

Soit $f$ la fonction définie sur un intervalle I comme composée des fonctions $g$ et $h$, c'est à dire que pour tout $x \in \mathrm{I}$, on a $f(x) = h \circ g(x) = h(g(x))$.

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, mapsto, "g"] \arrow[rr, bend right, "f = h \circ g"'] & g(x) = X \arrow[r, mapsto, "h"] & f(x) = h(X) = h(g(x)) \end{tikzcd}$$

Dans ce qui suit, $\alpha$, $\beta$ et $L$ peuvent désignés des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

On suppose que $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = \beta$ et que $\lim\limits_{X \to \beta} h(X) = L$ alors on peut en déduire que $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = L$.

**Propriétés** *Suites et fonctions*

Soit $(u_n)$ une suite de terme général $u_n = f(n)$ où $f$ est une fonction définie au voisinage de $+\infty$ .

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ ($\ell$ étant fini ou non) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ .

*Suites et composée*

Soient $f$ une fonction définie sur un intervalle I, $(v_n)$ une suite de réels appartenant à l'intervalle I et $(u_n)$ la suite de terme général $u_n = f(v_n)$ .

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \alpha$ ($\alpha$ étant fini ou non) et si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$ ($\ell$ étant fini ou non) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

## 3. Continuité d'une fonction

**Définition**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I contenant un réel $a$.

On dit que $f$ est continue en $a$ si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ .

On dit que $f$ est continue sur $I$ si elle est continue en tout réel de I.

**Propriétés**

- Les fonctions polynomiales, rationnelles, racine carrée, valeur absolue, sinus, cosinus ainsi que les sommes, produits, quotients et composées de telles fonctions sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- Toute fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

**Propriétés** *Suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$*

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $(u_n)$ une suite de réels de $I$ définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Si la suite $(u_n)$ est convergente vers un réel $\ell$ et si $f$ est continue en $\ell$ alors $f(\ell) = \ell$ .

**Théorème**

***des valeurs intermédiaires***

Soit $f$ une fonction définie et continue sur un intervalle un intervalle $[a\,;b]$ où $a < b$.

Pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[a\,;b]$.

**Corollaire**

***du théorème des valeurs intermédiaires (cas des fonctions strictement monotones sur un intervalle)***

Soit $f$ une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle un intervalle $[a\,;b]$ où $a < b$.

Pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle $[a\,;b]$.

*Remarques*

- On admet le prolongement du théorème et de son corollaire au cas où $f$ est définie sur un intervalle ouvert $]a\,;b[$ ou semi-ouvert $[a\,;b[$ ou $]a\,;b]$ avec $a$ et $b$ finis ou infinis. Dans ce cas, l'énoncé des théorèmes est à adapter en considérant les limites en $a$ ou en $b$ au lieu des images de ces réels.
- Afin de facilité la rédaction lors de l'utilisation du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on convient que les flèches obliques utilisées dans les tableaux de variations, traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

## 4. Dérivation et applications

**Théorème**

***Cas de la composée d'une fonction affine par une fonction f***

Soit $g$ la fonction définie sur un intervalle $I$ par $g(x) = f(ax+b)$.

On suppose donc que pour $x \in I$, $ax+b \in J$ et que $f$ est définie sur $J$.

Si $f$ est dérivable en $ax+b$ alors $g$ est dérivable en $x$ et on a

$$g'(x) = af'(ax+b).$$

**Propriétés** *Cas de la composée d'une fonction u par quelques fonctions usuelles*

Soit $u$ est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

| fonction $g$ | fonction dérivée $g'$ | Remarques éventuelles |
|---|---|---|
| $u^2$ | $2u'u$ | |
| $u^n$ où $n \in \mathbb{Z}$ | $nu'u^{n-1}$ | $u$ ne s'annule pas sur I si $n<0$ |
| $\dfrac{1}{u^n}$ où $n \in \mathbb{N}$ | $-\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$ | $u$ ne s'annule pas sur I |
| $\dfrac{1}{u}$ | $-\dfrac{u'}{u^2}$ | $u$ ne s'annule pas sur I |
| $\sqrt{u}$ | $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ | $u$ est strictement positive sur I |

*Remarque* Dans le cas général, si $u$ est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $f$ une fonction définie et dérivable sur un intervalle $J$ tel que $u(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$ alors la fonction $g = f \circ u$ est dérivable sur I et pour tout $x \in \mathrm{I}$,

$$g'(x) = (f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x)).$$

# B Exercices de synthèse

## Exercice I

Les assertions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

| | | |
|---|---|---|
| ❶ Si une fonction n'est pas continue sur un intervalle I alors elle n'est pas dérivable sur I | V | F |
| ❷ Si $f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour deux réels $a$ et $b$, $f(a)f(b) \leq 0$ alors $f$ s'annule au moins une fois entre $a$ et $b$ | V | F |
| ❸ Si $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle I telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \leq x$ alors pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \leq 1$ | V | F |

| | | |
|---|---|---|
| ❹ La fonction $f : x \mapsto x^2 E(x)$ est dérivable en 0 | V | F |
| ❺ Le coefficient directeur de la tangente à la courbe d'équation $y = (2x+1)^3 - x$ au point d'abscisse 0 est 2 | V | F |
| ❻ La courbe d'équation $y = x\sqrt{x(2-x)}$ admet une demi-tangente verticale au point de coordonnées (0 ; 0). | V | F |
| ❼ La suite $(u_n)$ est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ et $u_0 = a$ où $a \in \mathbb{R}_+$. Il existe $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $(u_n)$ soit convergente vers 2. | V | F |

## Exercice II *Étude d'une fonction rationnelle*

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 3}{x^2 + 1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}, \vec{j}\right)$.

❶ Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution que l'on note $\alpha$.
Donner un encadrement d'amplitude $10^{-2}$ de $\alpha$.

b) Déterminer le signe de $g(x)$.

❷ a) Étudier le sens de variation de $f$.

b) Déterminer les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$ puis dresser le tableau de variation de $f$.

c) Démontrer que $f(\alpha) = 1 + \dfrac{3}{2}\alpha$. En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.

❸ a) On note $\varphi(x) = f(x) - (x+1)$. Calculer la limite de $\varphi(x)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.
Étudier le signe de $\varphi(x)$. Que peut-on déduire de ces résultats concernant la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite $\Delta$ d'équation $y = x + 1$ ?

b) Déterminer les points de $\mathscr{C}_f$ en lesquelles la tangentes est parallèle à $\Delta$.

c) Déterminer une équation de la tangente $T$ à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse $-1$.
Que remarque-t-on concernant les droites $T$ et $\Delta$ ?

❹ Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ en s'appuyant sur les éléments mise en évidence au cours de l'exercice.

## Exercice III

Les questions 1, 2 et 3 peuvent être abordées de façon indépendante.

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\dfrac{x^2+6x+4\sin(3x)}{2x}$ et on note $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

**1** a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

b) On prolonge la définition de $f$ à $\mathbb{R}$ en posant $f(0)=\lambda$. Comment choisir $\lambda$ pour que $f$ soit continue sur $\mathbb{R}$ ?

**2** a) Calculer les limites de $f(x)-(\frac{1}{2}x+3)$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

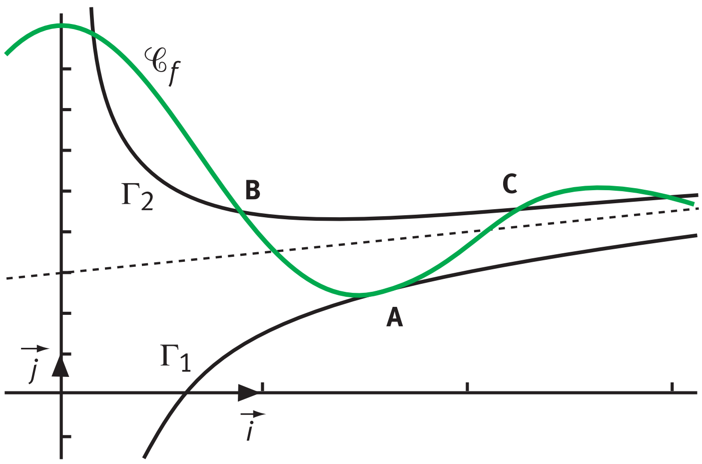
b) Déterminer une condition suffisante sur $x$ pour que $\left|f(x)-(\frac{1}{2}x+3)\right|<0{,}01$.

c) Interpréter graphiquement les résultats précédents.

**3** On dispose, ci-contre, du tracé sur $[0\,;\pi]$ de $\mathscr{C}_f$, de celui de la droite $\Delta$ d'équation $y=\frac{1}{2}x+3$, ainsi que des courbes $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ représentant respectivement les fonctions $g_1$ et $g_2$ définies sur $\mathbb{R}^*$ par

$$g_1(x)=\frac{x^2+6x-4}{2x} \text{ et } g_2(x)=\frac{x^2+6x+2}{2x}.$$

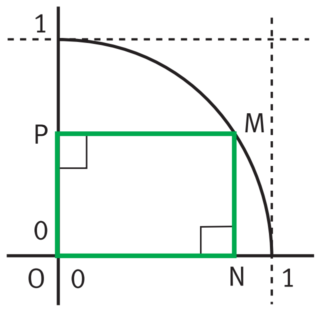
Déterminer l'abscisse de chacun des points A, B et C.




## Exercice IV

Ainsi que le montre la figure, M est un point du quart de cercle de centre O et de rayon 1 et les points N et P sont les projetés orthogonaux respectifs de M sur les axes de coordonnées.

Où placer le point M pour que le rectangle ONMP soit d'aire maximale ?



**Exercice V** On considère une fonction $f$ deux fois dérivable sur un intervalle I et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans la plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

On désigne par $a$ un réel de I et par $T$ la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $A(a\,;f(a))$.

Pour tout réel $x$ de I, on note M le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $x$ et $P$ le point de $T$ d'abscisse $x$.

❶ Justifier que $\overrightarrow{PM}=d(x)\vec{j}$ où $d(x)=f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)$.

❷ Dans cette question, on suppose que la fonction $f''$, dérivée seconde de $f$, est positive ou nulle sur l'intervalle I.

**a)** En étudiant les variations de la fonction $d'$, déterminer les variations de la fonction $d$ sur I.

**b)** En déduire que la courbe $f$ est située au-dessus de toutes ses tangentes.

Dans ce cas, on dit que la fonction $f$ est une fonction convexe sur I.

❸ Étudier de façon analogue la position de la courbe par rapport à ses tangentes dans le cas où la fonction $f''$ est négative ou nulle sur I.

Dans ce cas, on dit que la fonction $f$ est une fonction concave sur I.

❹ On suppose dans cette question que $f''$ change de signe en un réel $a$ de l'intervalle I. Supposons par exemple que si $x\in I$ et $x\le a$ alors $f''(x)\le 0$ alors que si $x\in I$ et $x\ge a$ alors $f''(x)\ge 0$.

Démontrer que le point A est dans ce cas un point d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$, c'est-à-dire un point en lequel la courbe $\mathscr{C}_f$ « traverse » sa tangente.

❺ **Application**

On considère la fonction $f$ définie sur $\left[-1\,;+\infty\right[$ par $f(x)=x^2\sqrt{x+1}$ et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$. On choisira 10 cm comme unité graphique.

**a)** Étudier la dérivabilité de $f$ en $-1$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

**b)** Étudier les variations de $f$ puis dresser son tableau des variations sur $\left[-1\,;+\infty\right[$.

**c)** Démontrer que, pour tout $x\in\left]-1\,;+\infty\right[$, $f''(x)$ est du signe de $15x^2+24x+8$.

**d)** En déduire la position de la courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à ses tangentes.

**e)** Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ ainsi que ses tangentes en les points remarquables.

## Exercice VI

**1** Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3x + 2\cos x$.

**a)** Étudier les limites de $g$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

**b)** Étudier le sens de variation de $g$ sur $\mathbb{R}$.

**c)** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ sur $\mathbb{R}$ et en donner un encadrement d'amplitude $10^{-2}$.

**2** On note $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{5}(x + \cos x)$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans la plan rapporté à un repère orthogonal (unités graphique : 5 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

On s'intéresse à la convergence de la suite $(u_n)$ définie sur $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

**a)** Étudier les variations de $f$.

**b)** On se propose d'illustrer graphiquement le problème.
Pour cela, déterminer les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisse 0 et $\frac{\pi}{2}$.
Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ ainsi que les deux tangentes. Construire sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite $(u_n)$.

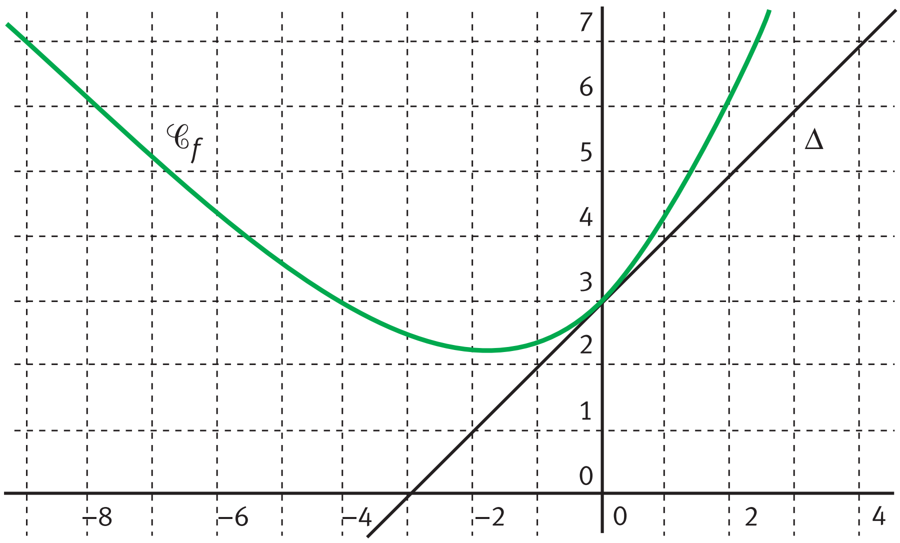
**c)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le 1$.

**d)** Montrer que la suite $(u_n)$ converge et déterminer sa limite.
*Pour une telle question, lorsque la démarche n'est pas indiquée, penser à laisser toute trace de recherche.*

## Exercice VII

Les deux questions peuvent être traitées de façon indépendante

**1** On dispose ci-dessous de la courbe $\mathscr{C}_f$ représentant une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a\,x + b + c\sqrt{x^2 + 9}$ où $a$, $b$ et c sont des réels. La droite $\Delta$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$.



a) Donner par lecture graphique $f(0)$, $f(-4)$ et $f'(0)$.

b) Déterminer alors les réels $a$, $b$ et $c$.

❷ On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 3 + 2\sqrt{x^2 + 9}$ et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

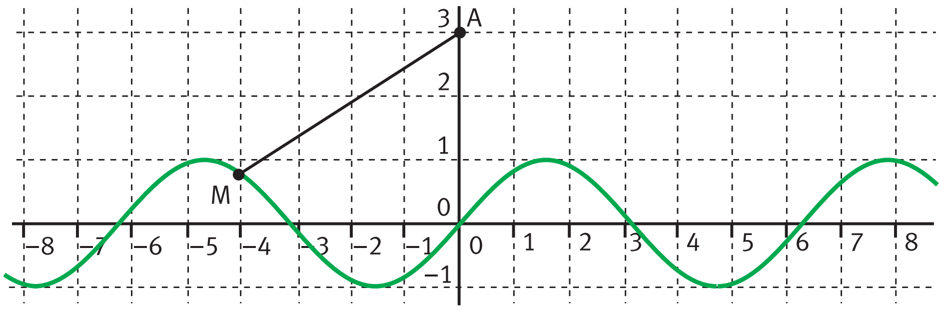
a) Déterminer une équation de la tangente au point d'abscisse $-4$.

b) Démontrer que la droite d'équation $y = -x - 3$ est asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$.

c) Démontrer qu'il existe un unique point de $\mathscr{C}$ en lequel la tangente à $\mathscr{C}$ est horizontale. Préciser les coordonnées de ce point.

## Exercice VIII *Distance d'un point à une courbe*

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on dispose de la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction sinus et du point A de coordonnées (0 ; 3).




Les objectifs de l'exercice sont de :

- trouver la position de M sur $\mathscr{C}$ minimisant la longueur entre le point A et la courbe représentative de la fonction sinus ;
- déterminer les points M de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}$ est perpendiculaire à la droite (AM).

❶ Visualiser le problème posé sous GeoGebra et conjecturer les résultats.

❷ Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 3\cos x + \sin x \cos x$.

a) Étudier les variations de $f$ sur $\left[-\frac{3\pi}{2} \,;\, \frac{3\pi}{2}\right]$, dresser son tableau des variations sur ce même intervalle puis démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions sur l'intervalle $\left[-\frac{3\pi}{2} \,;\, \frac{3\pi}{2}\right]$ dont on donnera un encadrement à $10^{-2}$.

b) Démontrer que pour tout $x \in \left[\frac{3\pi}{2} \,;\, +\infty\right[$, $f(x) > 0$ et que pour tout $x \in \left]-\infty \,;\, -\frac{3\pi}{2}\right]$, $f(x) < 0$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet 3 solutions réelles.

c) Établir le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel $x$.

3 a) On note $x$ l'abscisse du point M. Démontrer que la longueur AM s'écrit $d(x)=\sqrt{x^2+(\sin x-3)^2}$.

b) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $d'(x)$ est du signe de $f(x)$.

c) Étudier les variations de $d$ et conclure quant à la position de M minimisant la longueur entre le point A et la courbe représentative de la fonction sinus.

4 a) Démontrer que lorsque la longueur AM est minimale, la droite (AM) est perpendiculaire à la tangente à $\mathscr{C}$ en M.

b) Existe-t-il d'autres points M de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}$ est perpendiculaire à la droite (AM) ?

## Exercice IX

*Résolution d'une équation de degré 3*

L'objectif est de résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E)\ :\ 1+3x-x^3=0$.

1 Montrer que $(E)$ a exactement trois solutions dont on déterminera une valeur approchée à $10^{-3}$ près.

2 a) Montrer que la fonction $f$ définie sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(u)=2\sin u$ est strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ dans $\left[-2\,;2\right]$.

b) En utilisant $\sin(a+b)=\sin a\,\cos b+\sin b\,\cos a$ et $\cos(a+b)=\cos a\,\cos b-\sin a\,\sin b$, montrer que

$$\sin(3u)=3\sin u-4\sin^3 u.$$

c) En posant $x=2\sin u$, montrer que la résolution de l'équation (E) sur $\left[-2\,;2\right]$ équivaut à la résolution sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ de l'équation $(E')\ :\ 1+2\sin(3u)=0$

3 Résoudre l'équation (E') et en déduire les valeurs exactes des solutions de (E). Comparer avec les résultats de la question 1.

## Exercice X

Soit $f$ la fonction définie sur $\left[-3\ ;\ +\infty\right[$ par $f(x)=x\sqrt{x+3}$.

1 Étudier les variations de $f$ puis dresser son tableau des variations sur $\left[-3\ ;\ +\infty\right[$.

2 a) En s'appuyant sur une simple lecture du tableau des variations de $f$, donner les valeurs du réel $k$ pour lesquels l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution réelle.

**b)** Démontrer que les équations $f(x)=1$ et $f(x)=3$ admettent chacune une solution unique dont on donnera un encadrement d'amplitude $10^{-2}$.

3. Déterminer l'ensemble des valeurs du paramètre réel $\lambda$ pour lesquelles l'équation $x\sqrt{x+3}+\lambda\sqrt{\lambda+3}=1$ admet une unique solution réelle.

## Exercice XI

Soit $f$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout réel $x$, $f(10x)=f(x)$.

L'objectif est de démontrer qu'une telle fonction est constante sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que, pour tout réel $x$, la suite $(u_n)$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=f\left(\dfrac{x}{10^n}\right)$ est constante c'est-à-dire que $u_n$ ne dépend pas de $n$).

2. Calculer la limite de la suite $(u_n)$ de deux façons et conclure.