Onze exercices faisant intervenir la fonction exponentielle et des composées du type

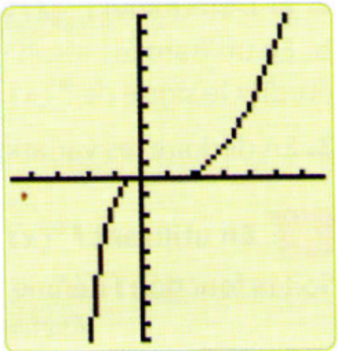
Exercice 1

Analyse critique d'un affichage

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + xe^{-x}.$$

Le graphique donne la courbe représentant f telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthogonal.



1. À l'observation de cette courbe, quelles conjectures peut-on faire concernant :

- le sens de variation de f sur $[-3;3]$?
- le signe de $f(x)$?

2. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1 - e^{-x} \geqslant 0$.

b. Montrer que, pour tout x, $f'(x) = (x-1)(1-e^{-x})$.

c. Étudier le signe de $f'(x)$.

d. Dresser le tableau de variations de f.

3. Conclure quant à la validité des conjectures émises à la question 1.

Exercice 2

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = xe^x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x}{e^x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives respectives dans le plan muni du repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. Étudier le sens de variation de chaque fonction.

2. Montrer que :

a. $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ n'ont que le point O en commun.

b. $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont une tangente commune en O.

Exercice 3

Un problème de tangente

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^{-x}$.

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère $(O;\vec{i},\vec{j})$. La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle des tangentes passant par l'origine O du repère ?

VERS LA PHYSIQUE Exercice 4

En été, un cyclotouriste mesure une pression atmosphérique de 909 hPa au sommet d'un col.
On considère, qu'à une température constante T, en degré Kelvin, pour des altitudes z pas trop grandes, la pression $P(z)$ est donnée en fonction de l'altitude z, en mètres, par $P(z) = P(0)e^{-\frac{Mgz}{RT}}$ où $P(0) = 1\,013$ hPa est la pression au niveau de la mer, $M = 28,97.10^{-3}$ kg.mol^{-1}, $R = 8,31$ J·mol^{-1}·K^{-1}. On prendra $g = 9,81$ m·s^{-2} et $T = 293$ K.

1. Comment varie la pression en fonction de l'altitude z ?

2. Estimer au mètre près l'altitude de ce col.

VERS LA CHIMIE Exercice 5

On considère deux réactions totales et successives d'ordre 1 dans un milieu homogène. Celles-ci concernent trois produits A, B et C d'après le schéma $A \to B \to C$.
On nomme x, y et z les concentrations relatives des produits A, B et C à l'instant t (en minutes), $t \geqslant 0$.
Les conditions initiales sont $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ et $z(0) = 0$.
L'étude cinétique permet d'écrire :

$$x(t) = e^{-0,5t} \quad \text{et} \quad y(t) = e^{-0,5t} - e^{-t}.$$

1. Quel est le sens de variation de la fonction x ?

2. Montrer que $y'(t) = e^{-0,5t}(-0,5 + e^{-0,5t})$ et en déduire que la fonction y admet un maximum M que l'on déterminera.
Préciser l'instant t_M tel que $y(t_M) = M$.

3. D'après le principe de conservation de la matière,

$$x(t) + y(t) + z(t) = x(0) + y(0) + z(0).$$

a. Justifier que la fonction z est strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.
b. À l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, déterminer t_0 tel que pour $t \geqslant t_0$, $z(t) \geqslant 0,99$.
Interpréter ce résultat pour les réactions étudiées.

En utilisant $f''(x)$ Exercice 6

Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = -xe^{-2x} + x - 1$$

1. Déterminer $f'(x)$.

2. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $f'(x) > 1$.
b. Étudier le sens de variation de la fonction f'.
c. Calculer $f'(0)$. En déduire le signe de $f'(x)$.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0\,;2]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

Suite et exponentielle

Ex 7 La suite (a_n) est la suite arithmétique de premier terme $a_0 = 2$ et de raison $-0,5$.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $bn = e^{-a_n}$.
Démontrer que (b_n) est une suite géométrique.

Exercice 8

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n \times e^n$.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1, u_2, u_3, u_4.

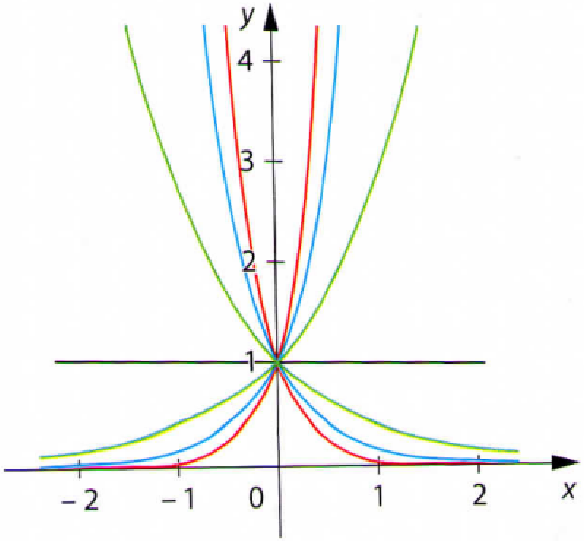
2. Montrer que pour $n \geqslant 2$, $u_n = e^{S_{n-1}}$ où $S_n = \sum_{k=1}^{n} k$.

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 9

Une famille de fonctions

Pour tout réel positif k, on considère les fonctions f_k et g_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = e^{kx}$ et $g_k(x) = e^{-kx}$.



On note $\mathscr{C}_k$ et Γ_k les courbes représentant f_k et g_k respectivement dans un repère orthonormé du plan.

1. Sur un logiciel de géométrie, tracer les courbes $\mathscr{C}_k$ et Γ_k avec k variable.

2. Étudier le sens de variation de f_k et de g_k.

3. Étudier la position relative de $\mathscr{C}_k$ et Γ_k (pour $k \geqslant 0$).

4. Déterminer la position relatice de $\mathscr{C}_k$ et $\mathscr{C}_{k'}$ pour $0 \leqslant k < k'$.

5. Étudier celle de Γ_k et $\Gamma_{k'}$ pour $0 \leqslant k \leqslant k'$.

Exercice 10

Avec une fonction auxiliaire (2)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x - 1}.$$

1. Soit $g(x) = -xe^x - 1$ pour tout réel x.

Montrer que, sur $\mathbb{R}^*$, f' a même signe que g.

2. Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$ puis en déduire son signe.

3. Dresser le tableau de variations de f.

En utilisant $f''(x)$ Exercice 11

Soit $f(x) = 3x + 3 + (x-3)e^x$ pour tout réel x.

1. Déterminer $f'(x)$ puis $f''(x)$.

2. Étudier les variations de f'.

3. En déduire le signe de $f'(x)$ pour tout x réel puis les variations de f.