Exercices sur la dérivabilité

Exercice 1 :
Dans chaque cas, l'ensemble de définition est déjà donné. Etudier la continuité puis la dérivabilité de chacune des trois fonctions. Déterminer ensuite l'expression de la fonction dérivée.

a. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sqrt{x^2+5}$

b. $\forall x \in]-\infty\,;-2] \cup [2\,;+\infty[\quad f(x) = \sqrt{x^2-4}$

c. $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) = \sin\sqrt{x}$

Exercice 2 :

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions définies ci-dessous, après en avoir étudié la dérivabilité.

a. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^4 - 4x + \pi$

b. $\forall x \in \mathbb{R}-\{1\} \quad f(x) = \dfrac{x^2+x+2}{x-1}$

c. $\forall x \in [0;+\infty[\quad f(x) = x\cos x + \sqrt{x}$

d. $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x\sin x + x - 5$

Exercice 3 :
Soit f la fonction définie sur [0 ;+∞[par $f(x) = x\sqrt{x}$.
Etudier la dérivabilité en 0.
Déterminer ensuite l'expression de la dérivée sur]0 ;+∞[.
Quel est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 ? au point d'abscisse $\dfrac{3}{2}$?
Placer ces deux points dans un repère orthonormé, puis construire ces deux tangentes.
Terminer par une construction de la courbe sur [0 ;9]

Exercice 4 :
On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$ et sa représentation graphique $\mathscr{C}$.
Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente $\mathscr{T}$ au point A d'abscisse 1.
(indication : on déterminera d'abord le coefficient directeur de cette droite, puis on en déduira une équation cartésienne de cette tangente)

Exercice 5 :
Répondre par Vrai ou Faux en justifiant.

« Si f est dérivable en a alors f n'est pas continue en a. »
« Si f n'est pas continue en a alors f n'est pas dérivable en a. »
« Si f est continue en a alors f est dérivable en a. »
« Il existe des fonctions non dérivable en a et non continues en a. »
« Il existe des fonctions non dérivable en a et continue en a. »
« Si f est une fonction dérivable sur un intervalle $[a\ ;\ b]$ alors on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur cet intervalle. »

Exercice 6 :
Déterminer l'ensemble de définition, puis étudier la continuité et la dérivabilité de chacune des trois fonctions suivantes. Déterminer ensuite l'expression de la fonction dérivée.

$f(x) = \left(5x^2 + \sqrt{x^2+8}\right)^7 \qquad g(x) = \sin(-3x+2) \qquad h(x) = \tan(x) + \sqrt{x^6+2}$

rappel : $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Exercice 7:

On note (E) l'équation : $x^5 - 10x^2 - 25x + 15 = 0$. L'objet de cet exercice est de déterminer le nombre de solutions de (E) et d'encadrer chacune de ces solutions.

On considère la fonction *f* définie sur **R** par $f(x) = x^5 - 10x^2 - 25x + 15$.

1. ***a*.** Calculer $f'(x)$, puis montrer que $f''(x) = 20x^3 - 20$.

***b*.** Déterminer les limites de f' aux bornes de son ensemble de définition, puis étudier les variations de f'.

***c*.** Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet deux solutions réelles, l'une entière que l'on précisera et l'autre que l'on notera α.

***d*.** Montrer que $1,88 < \alpha < 1,89$.

***e*.** Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.

2. ***a*.** Déterminer les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition.

***b*.** Étudier les variations de *f* puis dresser son tableau de variation.

***c*.** Calculer $f(1)$, puis montrer que $f(\alpha) < 0$ sans chercher à calculer ni encadrer $f(\alpha)$.

***d*.** Montrer que $f(\alpha) = -6\alpha^2 - 20\alpha + 15$.

***e*.** Encadrer $f(\alpha)$ en utilisant l'encadrement de α trouvé au **1. *d*.**.

3. Déduire de ce qui précède le nombre de solutions de (E).

Exercice 8 :

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^2 + x - 1}{x + 1}$ et sa représentation graphique $\mathscr{C}$.

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout réel x différent de -1, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

2. Montrer que $\mathscr{C}$ admet une asymptote oblique Δ et étudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ.

Exercice 10 :
N° 140 p 105

Exercice 11 :
N° 141 page 105

Exercice 12 :
N° 142 page 105