DM de Mathématiques

10/10

.35

$$\begin{cases} u_0 = 24 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 6 \\ v_{n+1} = \sqrt{u_n \times v_n} \end{cases}$$

$$\sqrt{24 \times 6} = \sqrt{6 \times 4 \times 6}$$
$$= \sqrt{6^2 \times 2^2} = 6 \times 2$$

idéal ...

u_1, v_1, u_2 et v_2 :

$$\frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{24+6}{2} = 15$$

$$\sqrt{u_0 \times v_0} = \sqrt{24 \times 6} = \sqrt{144} = 12$$

$$\frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{15+12}{2} = \frac{27}{2}$$

idéal

$$\sqrt{u_1 \times v_1} = \sqrt{15 \times 12} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$
$$= \sqrt{5 \times 3 \times 4 \times 3} = \sqrt{5} \times \sqrt{4} \times 3 = 6\sqrt{5}$$

ue $u_n > 0$ et $v_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$:

Supposons que P_n vraie ~~et que P'_n vraie~~. Montrons alors que P_{n+1} vraie ~~et que P'_{n+1} vraie~~, c'est à dire montrons que $u_{n+1} > 0$ donc que $\frac{u_n + v_n}{2} > 0$

et que $v_{n+1} > 0$ donc que $\sqrt{u_n \times v_n} > 0$.

Par hypothèse de récurrence $u_n > 0$,
Une racine carrée étant toujours positive, on a $\sqrt{u_n \times v_n} > 0$
on a donc v_n obligatoirement positif $(v_n > 0)$
donc $v_{n+1} > 0$

On sait maintenant que $v_n > 0$
donc $u_n + v_n > u_n > 0$

$2 > 0$ $\quad \frac{u_n + v_n}{2} > \frac{u_n}{2} > 0$

(car par hypothèse de récurrence $u_n > 0$)

d'où $\frac{u_n + v_n}{2} > 0$

donc $u_{n+1} > 0$

Les propositions sont héréditaires.

T.B

Conclusion : D'après l'initialisation et l'hérédité, pour tout n de $\mathbb{N}$, $\boxed{u_n > 0}$ et $\boxed{v_n > 0}$

3)a) Montrer que $u_n^2 - v_n^2 = \dfrac{(u_{n-1} - v_{n-1})^2}{4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}$$

$$v_n = \sqrt{u_{n-1} \times v_{n-1}}$$

d'où $u_n^2 - v_n^2 = \left(\dfrac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{u_{n-1} \times v_{n-1}}\right)^2$

$$u_n^2 - v_n^2 = \frac{(u_{n-1} + v_{n-1})^2}{4} - (u_{n-1} \times v_{n-1})$$

$$u_n^2 - v_n^2 = \frac{(u_{n-1})^2 + 2(u_{n-1})(v_{n-1}) + (v_{n-1})^2 - 4(u_{n-1})(v_{n-1})}{4}$$

$$u_n^2 - v_n^2 = \frac{(u_{n-1})^2 - 2(u_{n-1})(v_{n-1}) + (v_{n-1})^2}{4}$$

$$\boxed{u_n^2 - v_n^2 = \frac{(u_{n-1} - v_{n-1})^2}{4}}$$

b) En déduire que $u_n - v_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

On sait d'après la question 3)a) que $u_n^2 - v_n^2 = \dfrac{(u_{n-1} - v_{n-1})^2}{4} \geq 0$

(car un carré est toujours positif).

On a donc $u_n^2 - v_n^2 \geq 0$

$(u_n - v_n)(u_n + v_n) \geq 0$

D'après la question 2) on sait que $u_n > 0$ et $v_n > 0$

T. B

donc $u_n + v_n > 0$

comme $u_n + v_n > 0$ et que $(u_n - v_n)(u_n + v_n) \geq 0$

alors $\boxed{u_n - v_n \geq 0}$ obligatoirement (règle des signes).

Autre méthode : $u_n^2 - v_n^2 \geq 0 \Rightarrow u_n^2 \geq v_n^2$

$\Rightarrow u_n \geq v_n$

La fonction racine carrée est croissante sur $[0;+\infty[$

(Valable car $\sqrt{u_n^2} = u_n$ puisque u_n est positif, idem pour v_n)

4) En déduire que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}$$

D'après la question 3) b) on sait que $u_n - v_n \geqslant 0$

donc $v_n - u_n \leqslant 0$

d'où $\frac{v_n - u_n}{2} \leqslant 0$ $(2 > 0)$

donc $\boxed{u_{n+1} - u_n \leqslant 0}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

5) Montrer que la suite (u_n) est convergente :

D'après les questions précédentes, on sait que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$
donc (u_n) est décroissante et que $u_n > 0$ donc (u_n) est minorée par 0.

Donc, d'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente vers une limite réelle l.

Bien (Précise aussi que $l \geqslant 0$)

6) Exprimer v_n en fonction de u_{n+1} et u_n et en déduire que (v_n) converge vers la même limite que (u_n).

D'après la question 4),

$$u_{n+1} - u_n = \frac{v_n - u_n}{2}$$

$$2u_{n+1} - 2u_n = v_n - u_n$$

$$v_n = 2u_{n+1} - u_n$$

après la question 5,

$\lim u_n = \ell$ donc $\lim u_{n+1} = \ell$

et par produit $\lim 2u_{n+1} = 2\ell$

donc $\lim 2u_{n+1} - u_n = 2\ell - \ell$

$= \ell$

donc $\boxed{\lim v_n = \ell}$

<u>(u_n) converge vers la même limite que (v_n).</u>

7) <u>Algorithme :</u>

1. Liste des variables utilisées
2. n : entier
3. u, v : réels
4. Traitement
5. Donner à u la valeur 24
6. Donner à v la valeur 6
7. Donner à n la valeur 0
8. Tant que ($|u-v| \geq 0,1$) faire → 8'. Affecter w au réel u
9. Donner à u la valeur $(u+v)/2$
10. ~~Donner à v la valeur $\sqrt{u*v}$~~ → 10. Donner à v la valeur $\sqrt{w*v}$
11. Donner à n la valeur n+1
12. Fin tant que
13. Sortie
14. Afficher la valeur de n.

ligne

e

car

On calcule v en fonction de u, or u change de valeur juste avant le calcul de v et on veut la valeur de u "initiale" pour le calcul de v. Il suffit donc par exemple de donner une nouvelle lettre au u "initial" , w par exemple. Comme cela v est calculé n° 83 p.37

PARTIE A : Pour Youssef

- escalade 1 fois par semaine
- $-0{,}25\%$ masse par séance
- après chaque séance $+200g$
- $a_n \to$ masse en kg après n semaines
- $a_0 = 70$ kg

on peut en déduire que $a_{n+1} = a_n \times 0{,}9975 + 0{,}200$

1) Calculer a_1 et a_2 :

$a_1 = 0{,}9975\, a_0 + 0{,}2$
$a_1 = 0{,}9975 \times 70 + 0{,}2$
$\boxed{a_1 = 70{,}025 \text{ kg}}$

$a_2 = 0{,}9975\, a_1 + 0{,}2$
$a_2 = 0{,}9975 \times 70{,}025 + 0{,}2$
$\boxed{a_2 = 70{,}050 \text{ kg}}$

Ecrire les unités au cours des calculs aussi...

2) Expliquer pourquoi on a $a_{n+1} = 0{,}9975\, a_n + 0{,}2$:

La réduction de $0{,}25\%$ de masse s'exprime en multipliant la masse de départ, a_n, par $0{,}9975$ (car $0{,}25\% = 0{,}0025$ et $1 - 0{,}0025 = 0{,}9975$).
Et l'apport du repas en gramme après chaque séance s'exprime en ajoutant 200g, soit 0,2 kg.

3) Montrer par récurrence que $a_n = 80 - 10 \times 0{,}9975^n$

Soit P_n : " $a_n = 80 - 10 \times 0{,}9975^n$ "
$a_0 = 80 - 10 \times 0{,}9975^0 = 70$ $\quad P_0$ est vraie
La proposition est initialisée.
Supposons P_n vraie. On cherche alors à montrer que P_{n+1} est vraie aussi. C'est à dire $a_{n+1} = 80 - 10 \times 0{,}9975^{n+1}$
$0{,}9975\, a_n + 0{,}2 = 80 - 10 \times 0{,}9975^{n+1}$

P_n vraie $\Rightarrow a_n = 80 - 10 \times 0,9975^n$

P_n vraie $\Rightarrow 0,9975\, a_n = 79,8 - 10 \times 0,9975^{n+1}$

P_n vraie $\Rightarrow 0,9975\, a_n + 0,2 = 80 - 10 \times 0,9975^{n+1}$

P_n vraie $\Rightarrow P_{n+1}$ vraie

D'après l'initialisation et l'hérédité, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\boxed{a_n = 80 - 10 \times 0,9975^n}$

a) Calculer $a_{n+1} - a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = 0,9975\, a_n + 0,2 - (80 - 10 \times 0,9975^n)$$?

$$= \cancel{0,9975(80 - 10 \times 0,9975^n) + 0,2 - 80 + 10 \times 0,9975^n}$$

$$= \cancel{79,8} - 10 \times 0,9975^{n+1} + \cancel{0,2} - \cancel{80} + 10 \times 0,9975^n$$

$$= 0,9975 > 0$$

Bizarre puisque tu pourrais en déduire que la suite est arithmétique. Observe les premiers termes...

b) En déduire les variations de (a_n) :

$a_{n+1} - a_n > 0$ la suite (a_n) est donc strictement croissante.

Logique (mais mal justifié...)

5) Calculer la limite de (a_n) :

$\lim 0,9975^n = 0$ car $-1 < 0,9975 < 1$

par somme et par produit $\boxed{\lim a_n = 80}$

Cette valeur correspond à la masse maximale que Youssef pourra atteindre

$\longrightarrow a_{n+1} - a_n = 80 - 10 \times 0,9975^{n+1} - (80 - 10 \times 0,9975^n)$

PARTIE B : Pour Alban

- escalade 1 fois par semaine
- $-0,25\%$ masse et $+200$ g après chaque séance
- $b_n \rightarrow$ masse après n semaines
- $b_0 = 85$

on peut en déduire que $b_{n+1} = 0,9975\, b_n + 0,2$

- $c_n = b_n - 80 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que (c_n) est géométrique.

$$c_{n+1} = b_{n+1} - 80$$
$$= 0,9975\, b_n + 0,2 - 80$$
$$= 0,9975\, b_n - 79,8$$
$$= 0,9975\,(b_n - 80)$$
$$\boxed{c_{n+1} = 0,9975\, c_n}$$

$c_0 = b_0 - 80 = 5$ kg

(c_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,9975$ et de premier terme $c_0 = 5$.

2) En déduire c_n puis b_n en fonction de n :

$$c_n = c_0 \times q^n$$
$$\boxed{c_n = 5 \times 0,9975^n}$$

or $c_n = b_n - 80$

donc $b_n - 80 = 5 \times 0,9975^n$

$$\boxed{b_n = 5 \times 0,9975^n + 80}$$

3) En déduire la limite de (b_n) :

$\lim 0,9975^n = 0$ (car $-1 < 0,9975 < 1$)

par produit et par somme $\boxed{\lim b_n = 80}$

PARTIE C : Conclusion

1) Commenter les résultats des parties A et B :

Youssef prendra du poids alors qu'Alban en perdra.

Ils pourront tous les deux atteindre 80 kg.

2) Au bout de combien de temps Youssef et Alban auront moins d'1 kg d'écart ?

$b_n - a_n \leq 1$

$80 + 5 \times 0,9975^n - (80 - 10 \times 0,9975^n) \leq 1$

$\cancel{80} + 5 \times 0,9975^n - \cancel{80} + 10 \times 0,9975^n \leq 1$

$15 \times 0,9975^n \leq 1$

$0,9975^n \leq \frac{1}{15}$

$\log(0,9975^n) \leq \log\left(\frac{1}{15}\right)$

or $\log(0,9975^n) = n \log(0,9975)$

donc $n \log(0,9975) \leq \log\left(\frac{1}{15}\right)$

$n \geq \frac{\log\left(\frac{1}{15}\right)}{\log(0,9975)}$ $\quad (\log(0,9975) < 0)$

$n \geq 1082$ semaines

Il y a 52 semaines dans 1 an,

Donc $\frac{1082}{52} \simeq \boxed{21 \text{ ans}}$

Au bout d'environ 21 ans Youssef et Alban auront moins d'1 kg d'écart.